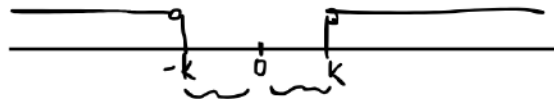


LEZIONE 2

INTORNO CIRCOLARE DI INFINITO

SI DICE INTORNO CIRCOLARE DI INFINITO UN INTERVALLO APERTO DOVE
I DUE ESTREMI DEFINITI (I DUE NUMERI REALI) RAPPRESENTANO LO STESSO
NUMERO A MENO DI UN SEGNO

$$I_c(\infty) = (-\infty, -K) \cup (K, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -K \vee x > K, K > 0\}$$



ESEMPIO

$$x^2 > 10^6$$

$$x_1 = -10^3 \quad x_2 = 10^3$$

$$x < x_1 \vee x > x_2$$

$$x < -10^3 \vee x > 10^3$$

$$I = \left[] - \infty, -10^3 [\cup] 10^3, +\infty [$$

$$x^2 = 10^6$$
$$x = \pm \sqrt[2]{10^6} = \pm 10^{\frac{6}{2}} = \pm 10^3$$

$$\sqrt[2]{10^6} = \left[(10^{\frac{1}{2}})^6 \right]^{\frac{1}{2}} = 10^{\frac{6}{2}} = 10^3$$

L'INSIEME DELLE SOLUZIONI DI QUESTA DISEQUAZIONE E' UN INTORNO CIRCOLARE DI INFINITO

$$\Rightarrow I_0(\infty)$$

$$I_K(x_0) = \{x \in \mathbb{R} \mid -K < x < K\}$$

INTORNO CIRCOLARE DI UN PUNTO x_0 DI RAGGIO K

$$\Downarrow$$

$$\boxed{|x| < K}$$

$$\boxed{K > 0}$$

$$I_c(\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -K \vee x > K\}$$

INTORNO CIRCOLARE DI INFINITO

$$\Downarrow$$

$$\boxed{|x| > K}$$

INTORNO DI c

ALCUNE CONSIDERAZIONI SUGLI INSIEMI LIMITATI
E ILLIMITATI

UN INSIEME NUMERICO A SI DICE SUPERIORMENTE LIMITATO SE ESISTE
UN CERTO NUMERO K, TALE CHE OGNI ELEMENTO DELL'INSIEME RISULTI
MINORE O AL PIU' UGUALE A K.

$$A \text{ lim. sup. } \approx \boxed{\exists k \in \mathbb{R} \mid \forall x \in A \Rightarrow x \leq k}$$

$$K \text{ MAGGIORANTE DI } A \approx \boxed{\forall x \in A \Rightarrow x \leq K}$$

K è MAGGIORANTE PER LE CONDIZIONI SOPRA, E LO PUO' ESSERE ANCHE QUALUNQUE NUMERO MAGGIORE DI K, QUINDI ANCHE ELEMENTI NON APPARTENENTI ALL'INSIEME A POSSONO ESSERE MAGGIORANTI DI A

SE QUESTA NON E' SODDISFATTA L'INSIEME RISULTA ILLIMITATO SUPERIORMENTE

$$A \text{ lim}_{\text{inf}} \text{ se } \boxed{\exists h \in A : \forall x \in A \Rightarrow x \geq h}$$

UN INSIEME A SI DICE INFERIORMENTE LIMITATO SE ESISTE
UN CERTO NUMERO h, TALE CHE OGNI ELEMENTO DELL'INSIEME
RISULTI MAGGIORE O AL PIU' UGUALE AD h

h MINORANTE
DI A

$$\boxed{\forall x \in A \Rightarrow x \geq h}$$

h E' MINORANTE PER LE CONDIZIONI SOPRA E LO PUO' ESSERE
QUALUNQUE NUMERO MINORE DI h E QUINDI ANCHE ELEMENTI
NON APPARTENENTI ALL'INSIEME A POSSONO ESSERE
MINORANTI DI A

SE QUESTA NON E' SODDISFATTA
L'INSIEME
RISULTA ILLIMITATO INFERIORMENTE

ESEMPIO $A =]-\infty; 2]$

A ill inf. 2 È MAGGIORANTE DI A

$$K=2$$
$$\forall \bar{x} \notin A \mid \bar{x} > K \Rightarrow \bar{x} \text{ MAGGIORANTE DI } A$$

AD ESEMPIO $\bar{x} = \sqrt{5} > K=2$ $\bar{x} = \sqrt{5}$ MAGGIORANTE DI A

$L \in \mathbb{R}$

ESTREMO SUPERIORE E INFERIORE, MASSIMO E MINIMO DI UN
INSIEME NUMERICO

ESTREMO SUPERIORE

1) $\forall x \in A \Rightarrow x \leq L$ $\Rightarrow$ L È MAGGIORANTE
DI A

2) $\forall \varepsilon > 0 \exists x \in A \Rightarrow \underline{x > L - \varepsilon}$ $L - \varepsilon$ NON È
MAGGIORANTE DI A

SE SI VERIFICANO 1) E 2) ALLORA
 L È ESTREMO SUPERIORE DI A

LA QUANTITÀ EPSILON RAPPRESENTA SOLAMENTE UN NUMERO
ARBITRARIAMENTE PICCOLO E QUINDI PARECCHIO MINORE DI 1

$\Downarrow$
 $\boxed{\sup A = L}$

$$\varepsilon \ll 1 \quad \varepsilon = \frac{1}{10}; \varepsilon = \frac{1}{100}; \varepsilon = \frac{1}{1000}$$

$$L = \sup A$$

A QUESTO PUNTO E' CHIARO CHE $\sup A$ NON APPARTIENE ALL'INSIEME A .
 SE INVECE IL $\sup A$ E' ANCHE PUNTO DELL'INSIEME DIVENTA AUTOMATICAMENTE
 IL PIU' GRANDE DEI MAGGIORANTI E A QUEL PUNTO SARA' CHIAMATO MASSIMO
 DELL'INSIEME A , CIOE' $\max A$

$$\sim L \in A \implies \max A = L$$

$$l \in \mathbb{R}$$

ESTREMO INFERIORE

$$1) \forall x \in A \implies x \geq l \implies l \text{ È MINORANTE DI } A$$

$$2) \forall \varepsilon > 0 \exists x \in A \implies x < l + \varepsilon \quad l + \varepsilon \text{ NON È MINORANTE DI } A$$

SE SI VERIFICANO 1) e 2) l SARA' DEFINITO ESTREMO INFERIORE E
VERRA' INDICATO CON $\inf A = l$

$$\boxed{\inf A = l}$$

SE I RISULTA APPARTENERE ALL'INSIEME A, CHIARAMENTE DIVIENE IL MINIMO DI A, E SI INDICHERA' CON LA NOTAZIONE $\min A$,

$$\boxed{\min A = l}$$

$$\sup A = +\infty$$

NEL CASO DI INSIEME ILLIMITATO SUPERIORMENTE

$$\inf A = -\infty$$

NEL CASO DI UN INSIEME ILLIMITATO INFERIORMENTE

ESEMPIO

$$A = (-\infty; 4)$$

DETERMINARE L'ESTREMO SUPERIORE E VERIFICARE ATTRAVERSO
LA DEFINIZIONE CHE L'ESTREMO SUPERIORE SIA EFFETTIVAMENTE
QUELLO TROVATO

$$\boxed{\sup A = 4 \text{ !!!}}$$

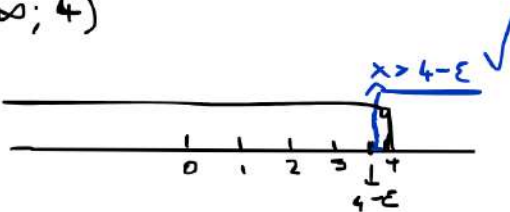
la 1) è verificata

2)

$$A = (-\infty; 4)$$

$$x > 4 - \varepsilon$$

$$\begin{array}{l} \sup A = 4 \\ \inf A = -\infty \end{array}$$



LA 2) È VERIFICATA