

LEZIONE 3

INTORNO DI INFINITO

$$I(-\infty) =]-\infty; a[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$$

Si dice intorno di $-\infty$ l'intervallo aperto che non possiede estremo sinistro, quindi risulta illimitato inferiormente.

$$I(+\infty) =]a; +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$$

Si dice intorno di $+\infty$ l'intervallo aperto che non possiede estremo destro, quindi risulta illimitato superiormente.

$$I(\infty) = I(-\infty) \cup I(+\infty) =]-\infty; a[\cup]a; +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < a \vee x > a\}$$

$$\boxed{a < b}$$

L'intorno di infinito rappresenta l'unione dei due intorni precedenti

ESEMPIO

$$x^2 - 3x - 4 > 0 \quad [x^2 - 3x - 4 = 0]$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4(1)(-4) = 9 + 16 = 25$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{25}}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{3-5}{2} = -1 \\ x_2 = \frac{3+5}{2} = 4 \end{cases}$$

$$x_1 = -1, 4$$

$$\boxed{x < -1 \vee x > 4}$$

$$\underline{I(\infty) =]-\infty; -1[\cup]4; +\infty[}$$

E' un intorno di infinito!!!

INTORNO CIRCOLARE DI INFINITO

Dicesi intorno circolare di infinito un'unione di intervalli aperti, rispettivamente di $+\infty$ e $-\infty$ in cui i due estremi a e b (visti in precedenza) differiscono solo per il segno.

$$K > 0$$

$$I_c(\infty) =]-\infty; -K[\cup]K; +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < -K \vee x > K\}$$


ESEMPIO

$$x^2 > 10^6$$

$$x_1 = -10^3, x_2 = 10^3$$

$$x < -10^3 \vee x > 10^3$$

$$I_c(\infty) =]-\infty; -10^3[\cup]10^3; +\infty[$$

$$x^2 = 10^6$$

$$x = \pm \sqrt[2]{10^6} = \pm 10^{\frac{6}{2}} = \pm 10^3 = \pm 1000$$

CONSIDERAZIONI SU INSIEMI LIMITATI E ILLIMITATI

A limitato
superiormente

$$\Leftrightarrow \forall x \in A \exists K \mid x \leq K$$

K NON
NECESS.
APPARTENENTE
AD A

Per ogni elemento appartenente all'insieme A deve esistere almeno
un numero K, per cui succeda che tutti gli elementi dell'insieme A
risultino minori o al più uguali a questo numero K

ES

$$A = [1; 4]$$

$A \in$

4 è il più piccolo dei maggioranti in questo caso

$\Rightarrow$

K MAGGIORANTE
DI A

5 è MAGGIORANTE!

SI

4 è MAGGIORANTE!

SI

Your paragraph text

A limitato inferiormente $\sim \forall x \in A \exists h \mid x \geq h$

Per ogni elemento x appartenente ad A deve esistere almeno un numero h , tale che tutti gli elementi dell'insieme A devono risultare maggiori o al più uguali al numero h

h NON
NECESS. APPART.
AD A

$\Rightarrow h$
MINORANTE
DI A

$$A = [1, 4]$$

-3 È MINORANTE DI A ? SÌ

1 È MINORANTE DI A ? SÌ

1 sarà in questo caso il più grande dei minoranti

ESTREMO SUPERIORE E MASSIMO
ESTREMO INFERIORE E MINIMO

A limitato superiormente

$$1) \forall x \in A \exists L \mid x \leq L$$

$$2) \forall \varepsilon > 0 \exists x \in A \mid x > L - \varepsilon$$

- 1) Il numero L è un maggiorante di A
- 2) Il numero L-epsilon non è maggiorante di A

Da 1) e 2) viene fuori la definizione di estremo superiore



Molto piccolo (a piacere)

In sostanza L è un maggiorante, ma che non appartiene ad A!!!

$$L \in \mathbb{R}$$

ε infinitesimo
 $\varepsilon \ll 1$

PRESO
A
TIA
TIA

$$\begin{aligned} \varepsilon &= 0,1 \\ \varepsilon &= 0,01 \\ \varepsilon &= 0,001 \end{aligned}$$

L'estremo superiore verrà indicato con la dicitura $\text{Sup}A$

ESEMPLO $A =]-\infty; 4[\Rightarrow \boxed{\text{Sup}A = 4}$

SE INVECE $A =]-\infty; 4] \Rightarrow \boxed{\text{max}A = 4}$

La dicitura $\text{max}A$ sta per massimo di A e indica l'estremo superiore che oltre ad essere tale, appartiene anche all'insieme A

A limitato inferiormente
 $\forall x \in A \exists l \mid x \geq l$
 $\exists l > 0 \exists x \in A \mid x < l + \epsilon$

- 1) Il numero l è un minorante di A
- 2) Il numero $l + \epsilon$ non è un minorante di A



In sostanza l è un minorante che non appartiene ad A

L'estremo inferiore verrà indicato con $\inf A$

ESEMPIO $] -4; +\infty[\Rightarrow \boxed{\inf A = -4}$

SE INVECE $[-4; +\infty[\Rightarrow \boxed{\min A = -4}$

La dicitura $\min A$ sta per minimo di A e cioè l'estremo inferiore che oltre ad essere tale, appartiene all'insieme