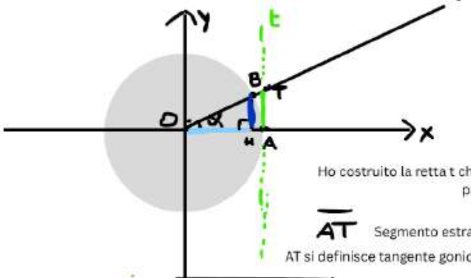
LEZIONE 3

TANGENTE GONIOMETRICA



$O(0;0)$ $\overline{OB}=1$

$\overline{BH} = \text{sen}\,\alpha$

$\overline{OH} = \cos\alpha$

$A(1,0)$

Ho costruito la retta t che è tangente alla circonferenza nel punto A e parallela all'asse delle y

$\overline{AT}$ Segmento estratto dalla retta t

AT si definisce tangente goniometrica dell'angolo alfa

$$\boxed{\overline{AT} = tg\,\alpha}$$

Possiamo trovare una relazione fra seno, coseno e tangente?

Osservando la figura precedente mi rendo conto che ci sono due triangolii rettangoli: OHB, OAT

OHB E OAT NO UGUALI!!! PERÒ.......

Risultano uguali i rapporti fra i loro lati

$$\frac{\overline{AT}}{\overline{BH}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OH}} \Longrightarrow \frac{tg\,\alpha}{sen\,\alpha} = \frac{1}{\cos\alpha}$$

$$\cancel{sen\,\alpha}\,\frac{tg\,\alpha}{\cancel{sen\,\alpha}} = \frac{1}{\cos\alpha}\cdot sen\,\alpha \Longrightarrow \boxed{tg\,\alpha = \frac{sen\,\alpha}{\cos\alpha}}$$

INTERVALLI DI PERIODICITA' E INTERVALLI DI VARIAZIONE DELLA TANGENTE

$$tg\,0^\circ = \frac{sen\,0^\circ}{\cos 0^\circ} = \frac{0}{1} = 0 \Rightarrow \boxed{tg\,0^\circ = 0}$$

$$tg\,90^\circ = tg\frac{\pi}{2} = \frac{sen\frac{\pi}{2}}{\cos\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{0}$$ IMPOSSIBILE!!! $\nexists$ NON ESISTE

$$tg\,180^\circ = tg\,\pi = \frac{sen\,\pi}{\cos\pi} = \frac{0}{-1} = 0 \Rightarrow \boxed{tg\,\pi = 0}$$

$$tg\,270^\circ = tg\frac{3}{2}\pi = \frac{sen\frac{3}{2}\pi}{\cos\frac{3}{2}\pi} = -\frac{1}{0}$$ IMPOSSIBILE!!! $\nexists$ NON ESISTE

$$\mathrm{tg}\,360° = \mathrm{tg}\,2\pi = \frac{\mathrm{sen}\,2\pi}{\cos 2\pi} = \frac{0}{1} = 0 \qquad \boxed{\mathrm{tg}\,2\pi = 0}$$

Si deduce quindi che la tangente come funzione goniometrica possiede una periodicità di un valore pari a pi greca, cioè un angolo piatto, ovvero si ripete uguale ogni 180 gradi.

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathrm{tg}\,\alpha = \mathrm{tg}(\alpha + k \cdot 180°) = \mathrm{tg}(\alpha + k\pi) \\ k \in \mathbb{Z} \quad k = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots \end{array}}$$

$$\boxed{-\infty < tg\,\alpha < +\infty} \setminus \boxed{\left\{\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}}$$

se $k = 1$

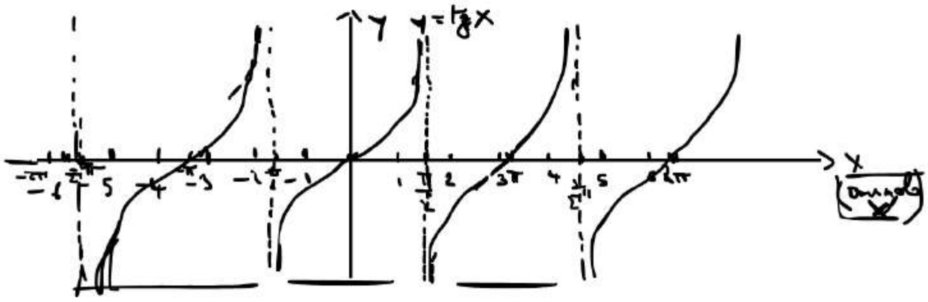
$$\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{1} = \frac{\pi + 2\pi}{2} = \frac{3}{2}\pi$$

Intervallo di esistenza della tangente

Definita ovunque tranne per l'angolo retto (90° o pi/2)) e tutti gli angoli che differiscono di 180° (pi) rispetto l'angolo retto.

$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$	$tg\,\alpha \uparrow$ (CRESCE)	$tg\,\alpha > 0$	$(0 < \alpha < 90°)$
$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$	$tg\,\alpha \uparrow$ (CRESCE)	$tg\,\alpha < 0$	$(90 < \alpha\ 180°)$
$\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$	$tg\,\alpha \uparrow$ (CRESCE)	$tg\,\alpha > 0$	$(180° < \alpha < 270°)$
$\frac{3}{2}\pi < \alpha < 2\pi$	$tg\,\alpha \uparrow$ (CRESCE)	$tg\,\alpha < 0$	$(270° < \alpha < 360°)$

GRAFICO DELLA FUNZIONE TANGENTE GONIOMETRICA



La tangente è una funzione che cresce sempre, si ripete periodicamente ogni 180 gradi e non è definita in tutti gli angoli periodici a 90° (cioè considerando ogni volta 90° sommato o sottrato a più volte 180°)...vedi slide precedenti!!!

$y = tg\,x$ $\qquad f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

ANGOLI ⇒ LUNGH. SEGMENTI

$$\boxed{D = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \ ; \ k \in \mathbb{Z} \right\}}$$

Dominio della funzione tangente di x, cioè i punti (ovvero gli angoli) in cui la tangente risulta definita

$$\boxed{tg = \frac{sen\,\alpha}{\cos\alpha}}$$

NEL TRIANGOLO OBH APPLICO PITAGORA

$$\overline{OH}^2 + \overline{BH}^2 = \overline{OB}^2$$

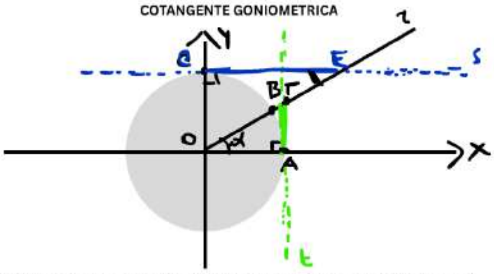
$$\boxed{\cos^2\alpha + sen^2\alpha = 1}$$

RELAZIONI FONDAMENTALI DELLA GONIOMETRIA

1) $\cos^2\alpha + \text{sen}^2\alpha = 1$

2) $\text{tg}\,\alpha = \dfrac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}$

COTANGENTE GONIOMETRICA



$\boxed{O(0;0) \quad \overline{OA} = 1}$

$\boxed{AT = tg\alpha}$

$C(0,1)$

$A(1,0)$

Costruisco la retta s, parallela all'asse delle x e tangente la circonferenza nel punto C (0,1). Questa retta incontra la retta r nel punto E.

Il segmento CE viene definito cotangente goniometrica dell'angolo alfa

$\boxed{\overline{CE} = cotg\alpha}$

Costruisco una relazione che lega la tangente goniometrica
alla cotangente goniometrica

Considero i triangoli OAT e OCE

1) **Sono entrambi rettangoli**

2) **Essendo CE e OA paralleli, quando sono tagliati da una retta trasversale formano angoli alterni interni uguali** $\Rightarrow C\hat{E}D = \alpha$

I due triangoli hanno tutti e tre gli angoli uguali
quindi risultano simili o proporzionali.

$\Downarrow$

$$\frac{\overline{CE}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OC}}{\overline{AT}} \Rightarrow \frac{\cot g\,\alpha}{1} = \frac{1}{tg\,\alpha} \Rightarrow \boxed{\cot g\,\alpha = \frac{1}{tg\,\alpha}}$$