

LEZIONE 4

FUNZIONI

Prodotto cartesiano fra insiemi

Il prodotto cartesiano fra due insiemi è un insieme che per elementi ha le coppie ordinate, in modo tale il primo elemento della coppia appartenga al primo insieme ed il secondo elemento della coppia appartenga al secondo insieme.

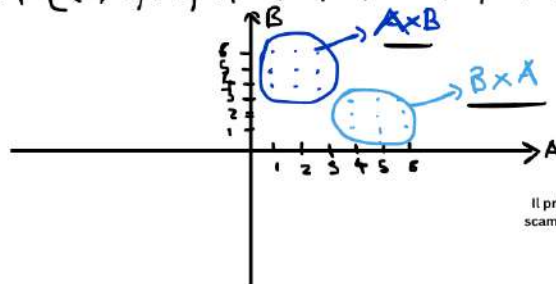
$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$$

ESEMPIO $A = \{1, 2, 3\}$ $B = \{4, 5, 6\}$

$$A \times B = \{(1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 4), (3, 5), (3, 6)\}$$

$$B \times A = \{(b, a) \mid b \in B, a \in A\}$$

$$B \times A = \{(4, 1); (4, 2); (4, 3); (5, 1); (5, 2); (5, 3); (6, 1); (6, 2); (6, 3)\}$$



$$A \times B \neq B \times A$$



Il prodotto cartesiano non è commutativo, cioè scambiando l'ordine degli insiemi nell'operazione l'insieme risultante cambia

RELAZIONE

La relazione è definita come un sottoinsieme dell'insieme prodotto cartesiano fra due insiemi.
Inoltre la relazione deve soddisfare una particolare condizione:

$$\mathcal{R} \subseteq A \times B$$

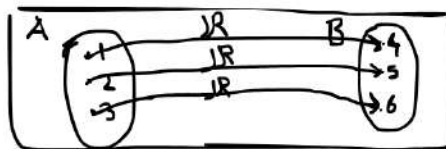
↳ È CONTENUTO

$a \in A$ APPARTIEN E
AD A
 $B \subseteq A$ B È
SOTTOINSIEME
DI A
(AL PIÙ UGUALE)

ESEMPIO $\mathcal{R} = \{(a, b) \in A \times B \mid b = a + 3, a \in A, b \in B\}$

Considerando l'esercizio esemplificativo possiamo costruire la rappresentazione per elencazione di questa relazione

$$\mathcal{R} = \{(1, 4), (2, 5), (3, 6)\}$$

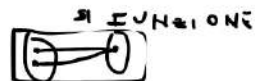


$$R = \{(1, 4); (2, 5); (3, 6)\}$$

Rappresentazione sagittale della relazione

$$b = a + 3$$

Legge della relazione nel primo esempio



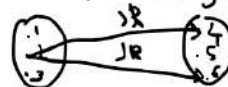
ESEMPIO 2

$$R = \{(a, b) \in A \times B \mid \underbrace{a=2m}_{\text{PARI}}; \underbrace{b=2m}_{\text{PARI}}\}_{m \in \mathbb{N}, 1 \leq m \leq 3}$$

$$R = \{(2, 4); (2, 6)\}$$

$$\left[\begin{array}{l} a = b = 2m \\ 1 \leq m \leq 3 \end{array} \right]$$

Legge della relazione nel secondo esempio



Your paragraph text

La funzione è definita come una relazione in cui io posso associare uno o due elementi dell'insieme di partenza (A) a uno ed uno solo elemento dell'insieme di arrivo (B)



SOLO SE SUCCEDDE QUESTO LA RELAZIONE DIVENTA UNA FUNZIONE!!!

$$\boxed{\forall a \in A \exists ! b \in B : a R b}$$



$$b = f(a)$$

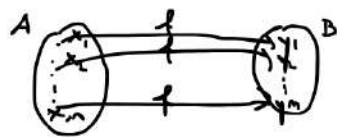
FUNZIONE

SI	OK!!!
FINO	
1:1	2:1

Per ogni elemento a appartenente all'insieme A deve esistere un unico elemento b appartenente all'insieme B tale che a sia in relazione con b

In base a questa definizione quella dell'esempio 1 è una funzione, mentre quella dell'esempio 2 non lo è mai e quindi rimane una semplice relazione!!!

1:2	NO!!!
NO	NON



$$f: A \rightarrow B$$

$$b \in B; a \in A$$

$$b = f(a)$$

f LEGGE
DELLA
FUNZIONE

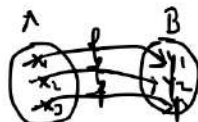
l'elemento b è esprimibile come funzione (attraverso una certa legge) dell'elemento a

L'insieme di partenza A della funzione prende il nome di DOMINIO

L'insieme di arrivo B della funzione prende il nome di CODOMINIO

FUNZIONI INIETTIVE, SURIETTIVE E BIETTIVE

Funzione Iniettiva



1:1

Per un unico elemento di A esiste uno ed uno solo elemento di B

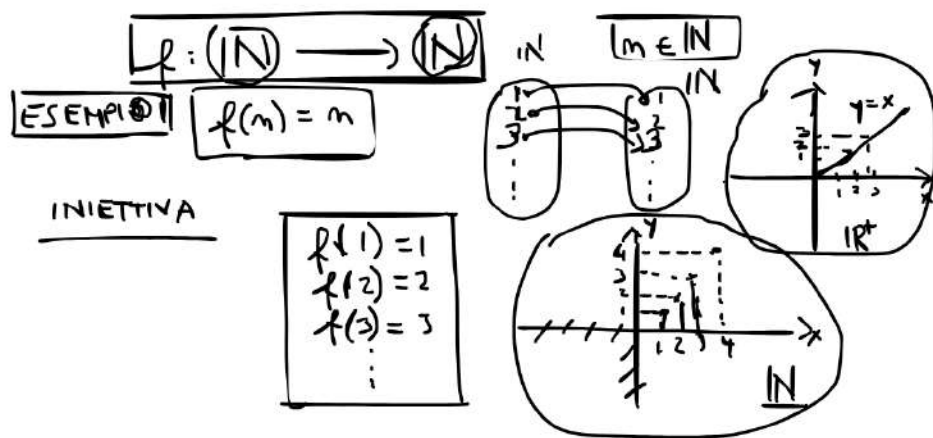
$$\forall x_1, x_2 \in A, x_1 \neq x_2 \Rightarrow \exists y_1, y_2 \in B: \begin{cases} y_1 = f(x_1) \\ y_2 = f(x_2) \\ y_1 \neq y_2 \end{cases}$$

$$A = \{x_1, x_2, x_3\}$$

$$B = \{y_1, y_2, y_3\}$$

$$\begin{cases} y_1 = f(x_1) \\ y_2 = f(x_2) \\ y_3 = f(x_3) \end{cases} \rightarrow \text{IMMAGINI}$$

Presi qualunque due elementi diversi di A devono esistere due corrispondenti immagini in B, diverse anch'esse fra di loro!!!



$$f(m) = m^2$$

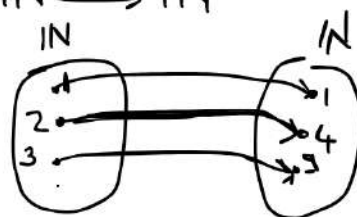
$$f(1) = (1)^2 = 1$$

$$f(2) = (2)^2 = 4$$

$$f(3) = (3)^2 = 9$$

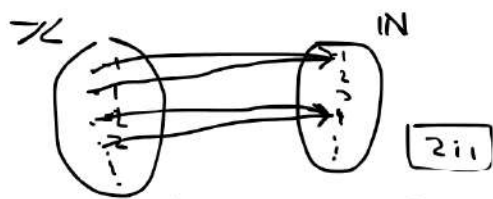
$$\vdots$$

$$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$$



(1:1)

FUNZIONE INIETTIVA



$$f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$$

$\mathbb{Z}$ INS. DEI NUMERI INTERI

$$f(m) = m^2$$

$$f(-1) = (-1)^2 = 1 \quad f(1) = 1^2 = 1$$

$$f(-2) = (-2)^2 = 4 \quad f(2) = 2^2 = 4$$

$$y = -x^2$$



NON INIETTIVA

