LEZIONE 4

FUNZIONI INIETTIVE, SURIETTIVE E BIIETTIVE

$X = \mathbb{R}$ $\quad Y = \mathbb{R}$

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$y = f(x)$

FUNZIONE INIETTIVA

Funzione iniettiva si definisce quella funzione che associa ad unico elemento del dominio un unico elemento del codominio. In poche parole, rapporto 1:1 fra gli elementi del dominio e quelli del codominio.

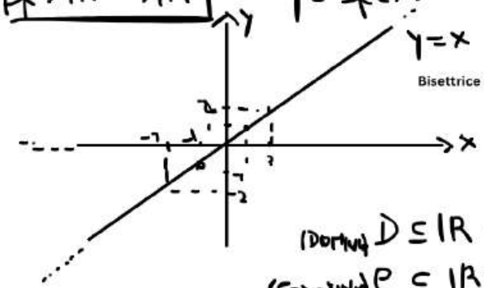
$$\boxed{\forall x_1, x_2 \in X ; x_1 \neq x_2 \underset{\exists! f(x_1), f(x_2)}{\Rightarrow} f(x_1) \neq f(x_2)}$$

$$\boxed{D \subseteq \mathbb{R}} \quad \text{) DOMINIO}$$

Per ogni coppia di numeri reali, diversi fra loro, appartenenti al dominio X (sottoinsieme dell'insieme dei numeri reali) deve esistere un'unica immagine per ognuno dei 2 numeri reali, diversi fra loro.

$$\boxed{\forall x_1, x_2 \in D \subseteq \mathbb{R} ; x_1 \neq x_2 ; \exists! f(x_1), f(x_2) \mid f(x_1) \neq f(x_2)}$$

ESEMPIO $\boxed{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}}$ $y = f(x) = x$



Bisettrice del primo e del terzo quadrante del piano cartesiano classico

$\boxed{\text{INIETTIVA}}$

(DOMINIO) $D \subseteq \mathbb{R} = ?$ $X = \mathbb{R}$

(CODOMINIO) $C \subseteq \mathbb{R} = ?$ $Y = \mathbb{R}$

$I =$ Cod $\boxed{\text{SURIETTIVA}}$

Your paragraph text

Funzione suriettiva

Introduciamo dapprima l'insieme delle IMMAGINI, che non è altro che quell'insieme che per elementi ha le immagini della funzione, cioè in pratica tutte le f(x), ovvero tutte le possibili corrispondenze degli elementi del dominio con gli elementi del codominio!!!

Im f

$\boxed{I}$

$\Downarrow$

$\boxed{Y = \mathbb{R}}$

Questo significa che l'insieme delle immagini è un sottoinsieme del codominio o al più è esattamente il codominio stesso

$$\boxed{I \subseteq Cod} \qquad I = \{ y \in Y \mid y = f(x), x \in D \}$$

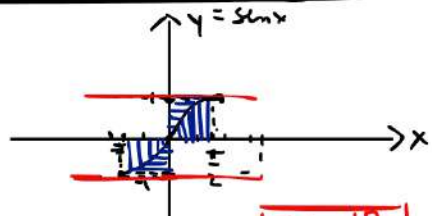
Nel caso di funzione suriettiva $\boxed{I = Cod}$ **Tutto l'insieme delle immagini coincide con il codominio**

Your paragraph text

ESEMPIO DI FUNZIONE NON SURIETTIVA

$\boxed{y = \underbrace{f}_{\text{LEGGE}}(x) = \text{sen}\, x \qquad f: \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow \mathbb{R}}$

INSIEMI DI AZIONE DELLA LEGGE



INIETTIVA

$I = [-1; 1]$

INSIEME DELLE IMMAGINI DI $y = f(x) = \text{sen}\, x$

NON SURIETTIVA!!! $\longleftarrow$ $\boxed{I \subset \mathbb{R}}$

$\boxed{f(x) = \operatorname{sen} x}$

$f: \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow [-1; 1]$

$\Downarrow$

Ho operato una restrizione del codominio

Ridefinita così la funzione diviene sia iniettiva che suriettiva

$\Downarrow$

$\boxed{\text{FUNZIONE BIIETTIVA}}$

FUNZIONE INVERSA

La funzione inversa di una funzione f di partenza è così definita:

$f: X \to Y$

$$\boxed{f^{-1}: Y \to X}$$

$$\boxed{f^{-1} \neq \frac{1}{f}}$$

PICCCOLO GROSSO APPUNTO

La funzione f di partenza può essere invertita solamente se questa risulta essere biiettiva.

SECONDO GROSSO APPUNTO

La funzione inversa, se esiste, deve sempre essere UNICA!!!

OVVERO NON POSSONO ESISTERE DUE FUNZIONI INVERSE CORRISPONDENTI ALLA STESSA FUNZIONE DI PARTENZA!!!

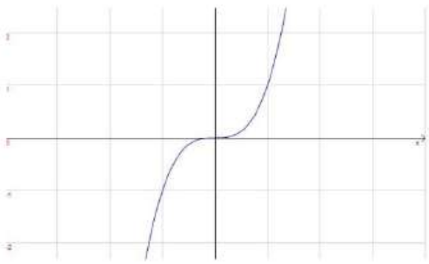
Your paragraph text

ESEMPIO

$$\boxed{y = x^3}$$

$$\boxed{y = f(x) = x^3}$$

$$\boxed{f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}}$$



INIETTIVA

$$\boxed{\forall\, x_1, x_2 ;\ x_1 \neq x_2\ \exists!\ f(x_1); f(x_2) \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)}$$

SURIETTIVA

$$\boxed{Cod = I}$$

$$\Downarrow$$

BIIETTIVA $\Longrightarrow$ ESISTE f^{-1}

$y = x^3$

$x^3 = y$

$\boxed{x = \sqrt[3]{y}}$

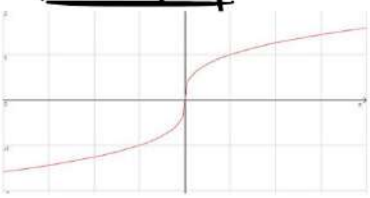
$y = f(x) = x^3$

$x = f^{-1}(y)$

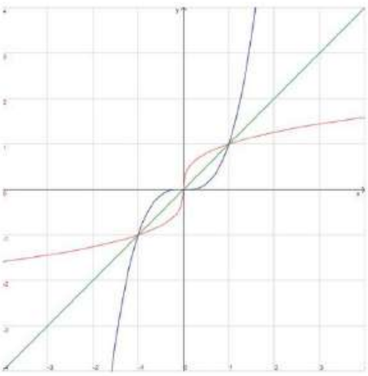
$\boxed{z = f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}}$

$\boxed{f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}}$

x, y SONO INDICI MUTI



INVERSA DI $y = f(x) = x^3$



$\boxed{CBNT(x) \Rightarrow f(x) = \sqrt[3]{x}}$

In questo grafico osservo che i grafici delle delle funzioni $f(x) = x^3$ e della sua inversa $f(x) = CBRT(x)$ risultano essere simmetrici rispetto il grafico della retta bisettrice del primo e terzo quadrante, ovvero $y=x$.