

LEZIONE 8
Limiti - Introduzione

$$y = f(x) = \frac{2x^2 - x - 1}{x - 1}$$

$$\text{Dom} f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

La funzione in questione non è definita per $x=1$.

Nelle vicinanze del punto $x=1$ come
si comporta il grafico della funzione?



Possibili valori di un infinitesimo

$$\begin{aligned} \varepsilon &= 0,1 \\ \varepsilon &= 0,01 \\ \varepsilon &= 0,001 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Your paragraph text

$$2x^2 - x - 1 =$$

$$= (x-1)(2x+1)$$

$$f(x) = \frac{2x^2 - x - 1}{x-1} =$$

$$f(x) = \frac{(x-1)(2x+1)}{(x-1)}$$

$$\boxed{f(x) = 2x+1}$$

$$\Delta = (-1)^2 - 4(2)(-1) = 1 + 8 = 9$$

$$x_1 = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{4} \rightarrow \frac{1+3}{4} = 1$$

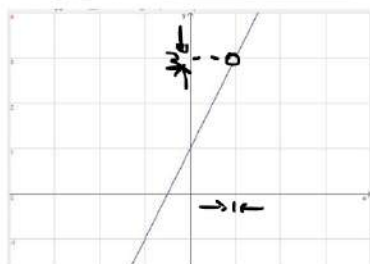
$$x_2 = \frac{1-3}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$(x-1)(2x+1)$$

$$D_{\text{om}} f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

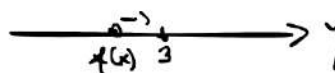
$$\bullet \boxed{f'(x) = 2x+1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} 2x + 1 = 3$$



Il limite per x che tende al valore 1 rappresenta il valore della funzione calcolata nel punto 1 se questo è possibile, altrimenti il valore a cui la funzione si avvicina.

Da un punto di vista geometrico equivale a dire che la funzione si avvicina tanto più a 3, quanto x si avvicina al valore 1.



$$|f(x) - 3|$$

Distanza geometrica fra la funzione e il valore che assume la funzione quando x si avvicina al valore 1

$1 - \varepsilon$ ← →

x	$ f(x) - 3 $
0,9	0,2
0,99	0,02
0,999	0,002

SCEGLIAMO

$$\varepsilon = 0,1$$

$$1 - 0,1 = 0,9$$

$$f(x) = 3x + 1$$

$$f(0,9) = 2,98 + 1 = 3,98$$

$$|2,98 - 3| = 0,02$$

SCEGLIAMO

$$\varepsilon = 0,01$$

$$\varepsilon = 0,001$$

$1 + \varepsilon$

x	$ f(x) - 3 $
1,1	0,2
1,01	0,02
1,001	0,002

$$\begin{aligned} \varepsilon = 0,1 \quad 1 + 0,1 &= 1,1 \\ f(1,1) &= 2 \cdot 1,1 + 1 = \\ &= 2,2 + 1 = 3,2 \\ |3,2 - 3| &= 0,2 \\ &= 0,2 \end{aligned}$$

$$|f(x) - 3| \quad \text{per } x \rightarrow 1$$

Questa distanza rimane sempre infinitesima

$$|f(x) - 3| < \varepsilon$$

$$-\varepsilon < f(x) - 3 < \varepsilon$$

$$f(x) = 2x + 1 \quad \text{Dom } f = \{\mathbb{R} \cup i\}$$

$$- \varepsilon < 2x + 1 - 3 < \varepsilon$$

$$- \varepsilon < 2x - 2 < \varepsilon$$

AGGIUNGO 2 A TUTTI I TERMINI

$$+2 - \epsilon < 2x - 3 + 2 < \epsilon + 2 \Rightarrow \boxed{2 - \epsilon < 2x < 2 + \epsilon}$$

2. VÍDIO
 1. VÍDIO
 2. VÍDIO

Your paragraph text

$$\begin{array}{l}
 \frac{2-\varepsilon}{2} < \cancel{\frac{2}{2}} x < \frac{2+\varepsilon}{2} \\
 \boxed{1 - \frac{\varepsilon}{2} < x < 1 + \frac{\varepsilon}{2}} \implies \boxed{x \in \left] 1 - \left(\frac{\varepsilon}{2}\right); 1 + \left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \right[} \\
 \downarrow \\
 \boxed{\text{INTERNO CIRCOLARE} \\ \text{DI RAGGIO } \boxed{\delta = \frac{\varepsilon}{2}}}
 \end{array}$$

Tutto ciò porta a una conseguenza generale

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = l$$

Nel caso di limiti di funzioni che tendono a un valore finito l , per x che tende anch'esso ad un valore finito c (Corrisponde alla 1° tipologia di limite), succede questo:

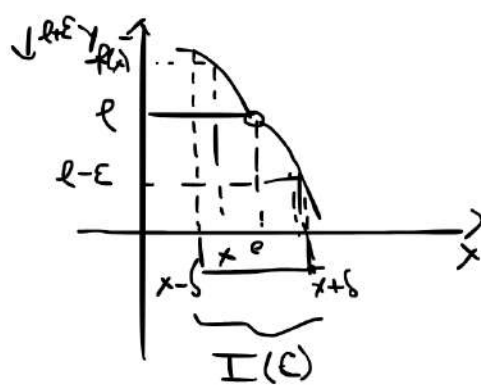
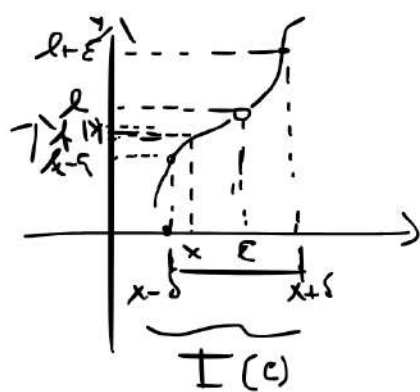
$$\forall \varepsilon > 0 \exists I(x=c) : \forall x \in I(x=c) \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

Scelto un qualunque infinitesimo arbitrariamente piccolo e positivo epsilon, deve esistere

un intorno completo del punto $x=c$ tale che per ogni x appartenente all'intorno deve verificarsi che la distanza geometrica fra la funzione $f(x)$ e il suo valore limite l sia infinitesima (in sostanza $f(x)$ deve avvicinarsi tanto più ad l quanto x si avvicini a c).

LIMITI DI FUNZIONI CHE TENDONO AD UN VALORE FINITO PER x CHE TENDE AD UN VALORE FINITO.

Your paragraph text



$$\lim_{x \rightarrow 2} 4 - x^2 = 0$$

$$f(x) = 4 - x^2$$

VERIFICARE QUESTO CON
LA DEFINIZIONE

$$\forall \varepsilon > 0 \exists I(2) : \forall x \in I(2) \Rightarrow |4 - x^2 - 0| < \varepsilon$$

$$|4 - x^2| < \varepsilon$$

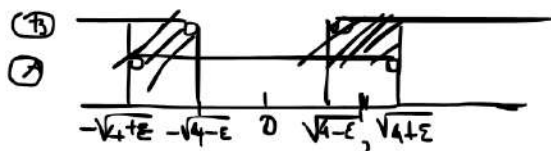
$$|4 - x^2| < \varepsilon \Rightarrow \boxed{-\varepsilon < 4 - x^2 < \varepsilon} \quad (A)$$

$$\begin{cases} 4 - x^2 > -\varepsilon \\ 4 - x^2 < \varepsilon \end{cases} \quad \leftarrow \begin{cases} x^2 - 4 < \varepsilon \Rightarrow \boxed{x^2 < 4 + \varepsilon} \\ x^2 - 4 > -\varepsilon \Rightarrow \boxed{x^2 > 4 - \varepsilon} \end{cases}$$

$$(A) \quad x = \pm \sqrt{4 + \varepsilon} \quad \left\{ \begin{array}{l} \boxed{-\sqrt{4 + \varepsilon} < x < \sqrt{4 + \varepsilon}} \quad (A) \end{array} \right.$$

$$(B) \quad x = \pm \sqrt{4 - \varepsilon} \quad \left\{ \begin{array}{l} \boxed{x < -\sqrt{4 - \varepsilon} \vee x > \sqrt{4 - \varepsilon}} \quad (B) \end{array} \right.$$

$$\boxed{\sqrt{4 + \varepsilon} > \sqrt{4 - \varepsilon} > -\sqrt{4 - \varepsilon} > -\sqrt{4 + \varepsilon}}$$



NON
È UN
INTERNO
DI 2

È UN INTERNO
COMPLETO DI 2

$$I(x=2) =]\sqrt{4-\epsilon}; \sqrt{4+\epsilon}[$$

$$f(x) = 4 - x^2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} 4 - x^2 = f(2) = 0$$

$$\epsilon = 0,1$$

$$\sqrt{4-0,1} = \sqrt{3,9} \approx 1,98$$

$$\sqrt{4+0,1} = \sqrt{4,1} \approx 2,02$$

$$f(2) = 4 - 2^2 = 4 - 4 = 0$$