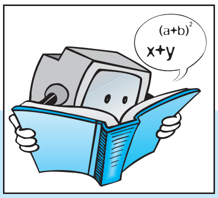
3

RELAZIONI E FUNZIONI



Per ricordare

Dati due insiemi A e B e una proposizione aperta $p(x,y)$, con $x \in A$ e $y \in B$, si dice che **x è in relazione con y**, e si scrive $x \mathcal{R} y$, se $p(x,y)$ è vera; si parla allora di relazione di A verso B.
Le coppie (x,y) tali che $x \mathcal{R} y$ rappresentano un sottoinsieme, proprio o improprio, del prodotto cartesiano $A \times B$.
L'elemento y della coppia (x,y) si chiama **immagine**, l'elemento x si chiama **controimmagine**.
L'insieme delle controimmagini è il **dominio** della relazione, l'insieme delle immagini è il **codominio**.
Quando x e y appartengono allo stesso insieme, si parla di **relazione in un insieme**.
Invertendo la corrispondenza fra gli insiemi A e B si ottiene la relazione inversa che si indica con il simbolo $\mathcal{R}^{-1}$.

Per rappresentare una relazione da A verso B si utilizzano modalità simili a quelle usate per il prodotto cartesiano; nelle figure a lato abbiamo rappresentato la relazione $\mathcal{R}$ definita sugli insiemi dall'enunciato aperto $p(x,y)$: «x è la metà di y» con $x \in A$ e $y \in B$ essendo $A = \{1,2,3,4,5\}$ e $B = \{2,4,6,7,8\}$:

- per elencazione, scrivendo le coppie (x,y) che soddisfano $\mathcal{R}$: $\{(1,2),(2,4),(3,6),(4,8)\}$
- mediante rappresentazione cartesiana (***figura 1***)
- mediante una tabella a doppia entrata (***figura 2***)
- mediante rappresentazione sagittale (***figura 3***)

La rappresentazione sagittale diventa un **grafo** quando la relazione è definita in uno stesso insieme. La stessa relazione definita nell'insieme $A = \{1,2,4,6,8,10,12\}$ viene rappresentata come in ***figura 4***.

Una relazione che è definita in un insieme A può godere di alcune proprietà (osserva la ***figura 5***):

- **riflessiva** se ogni elemento di A è in relazione con se stesso:
  $x \mathcal{R} x \qquad \forall x \in A$

Figura 1

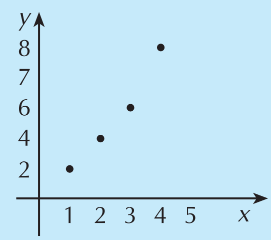


Figura 2

A \ B	2	4	6	7	8
1	1	0	0	0	0
2	0	1	0	0	0
3	0	0	1	0	0
4	0	0	0	0	1
5	0	0	0	0	0

Figura 3

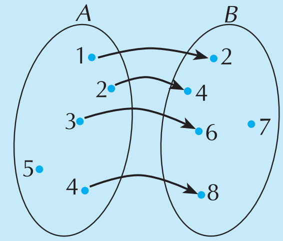
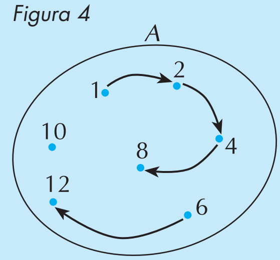
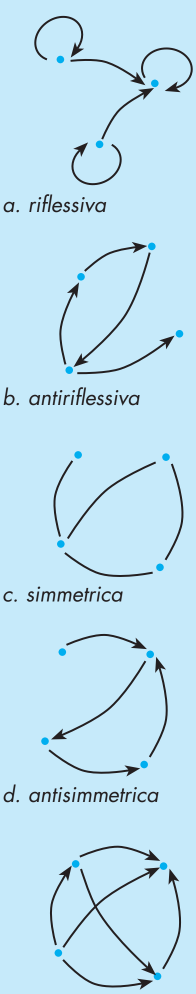


Figura 4



- **antiriflessiva** se nessun elemento di A è in relazione con se stesso:
  $x \not\mathcal{R} x \qquad \forall x \in A$
- **simmetrica** se per ogni coppia di elementi $x,y \in A$ tale che x è in relazione con y, anche y è in relazione con x (in ***figura 5c*** la relazione è rappresentata con un arco senza frecce a significare un doppio orientamento):
  $x \mathcal{R} y \quad \rightarrow \quad y \mathcal{R} x \qquad \forall x,y \in A$
- **antisimmetrica** se per ogni $x,y \in A$ tale che x è in relazione con y e y è in relazione con x, allora $x = y$:
  $x \mathcal{R} y \wedge y \mathcal{R} x \quad \rightarrow \quad x = y \qquad \forall x,y \in A$
  In pratica una relazione è antisimmetrica se, quando $x \mathcal{R} y$, non capita mai che sia $y \mathcal{R} x$ se x e y sono diversi.
- **transitiva** se per ogni terna di elementi $x,y,z \in A$ tale che x è in relazione con y e y è in relazione con z, allora x è in relazione con z :
  $x \mathcal{R} y \wedge y \mathcal{R} z \quad \rightarrow \quad x \mathcal{R} z \qquad \forall x,y,z \in A$

Figura 5



a. riflessiva

b. antiriflessiva

c. simmetrica

d. antisimmetrica

e. transitiva

Nella rappresentazione con un grafo, le proprietà delle relazioni sono facilmente individuabili: in una relazione riflessiva ogni elemento ha un anello, in una antiriflessiva nessun elemento ha un anello, in una simmetrica le coppie di elementi in relazione sono uniti da un arco doppiamente orientato, in una antisimmetrica non ci sono archi doppiamente orientati, in una transitiva non ci devono essere situazioni "triangolari" non chiuse.

★ Una relazione che è riflessiva, simmetrica e transitiva si dice **relazione di equivalenza**.
Le relazioni di equivalenza suddividono l'insieme A in sottoinsiemi detti classi di equivalenza, ciascuna delle quali contiene gli elementi di A che sono in relazione fra loro. L'insieme i cui elementi sono le classi di equivalenza si chiama **insieme quoziente**.

★ Una relazione che è antisimmetrica e transitiva si dice **relazione d'ordine**; se vale anche la proprietà riflessiva la relazione è di ordine largo.
Se due qualsiasi elementi di A sono sempre confrontabili rispetto alla relazione $\mathcal{R}$, si parla di **relazione d'ordine totale** e si dice che A è totalmente ordinato. Se invece esistono almeno due elementi che non sono confrontabili la relazione d'ordine è **parziale** e l'insieme A si dice parzialmente ordinato.

★ Una relazione fra due insiemi A e B è una **funzione** o **applicazione** di A in B se ad ogni elemento del primo insieme fa corrispondere uno ed un solo elemento del secondo; in questo caso, si parla anche di **corrispondenza univoca** fra A e B.
Una funzione f fra l'insieme A e l'insieme B si indica in uno dei seguenti modi:

$$f : A \rightarrow B \qquad\qquad A \xrightarrow{f} B$$

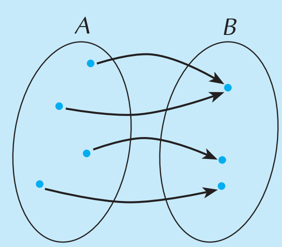
Se poi A e B sono insiemi numerici e se la relazione che lega x e y si può esprimere mediante un'equazione, si scrive

$$y = f(x) \quad \text{con } x \in A \wedge y \in B$$

In base al tipo di legame che esiste fra gli elementi x e gli elementi y una funzione f si dice:

- **suriettiva** se l'insieme delle immagini coincide con l'insieme B (***figura 6***)

Figura 6

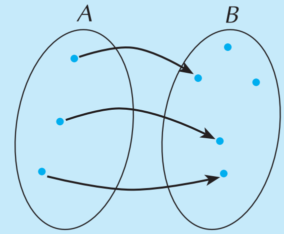


Funzione suriettiva

- **iniettiva** se ad elementi distinti di A corrispondono elementi distinti di B (***figura 7***)
- **biiettiva** se è contemporaneamente iniettiva e suriettiva (***figura 8***).

In pratica, una funzione è biiettiva se ad ogni elemento di A corrisponde un solo elemento di B e viceversa; le funzioni biiettive si dicono anche **corrispondenze biunivoche.**
Le funzioni biiettive sono le sole funzioni invertibili, tali cioè che la relazione inversa f^{-1} sia ancora una funzione.

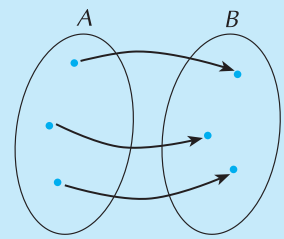
Figura 7



Funzione iniettiva

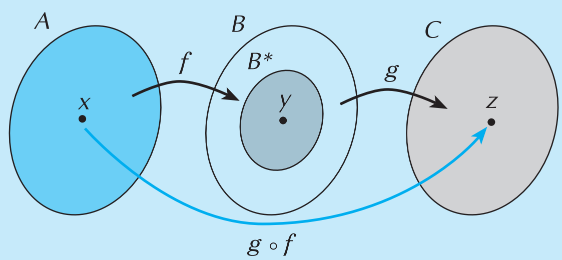
★ Data una funzione $f : A \rightarrow B$ ed indicato con B^* l'insieme delle immagini, sia g la funzione che agli elementi di B^* associa gli elementi di un altro insieme C (***figura 9***). Si può pensare alla funzione k che associa direttamente gli elementi x di A agli elementi z di C che provengono da un y di B^*; questa funzione è il **prodotto** delle funzioni f e g e si scrive $k = g \circ f$.
Nella scrittura del prodotto, la funzione che viene applicata per ultima è indicata per prima.

Figura 8



Funzione biiettiva

Figura 9



Esercizi di Consolidamento

1 Dati $A = \{x \in N \mid 6 \leq x \leq 15\}$ e $B = \{y \in N \mid y \leq 5\}$ rappresenta le coppie della relazione $\mathscr{R}$ definita dall'enunciato aperto $p(x, y)$: «$x = 3y$» con $x \in A$ e $y \in B$ mediante elencazione, rappresentazione cartesiana, rappresentazione sagittale. $[\{(6, 2), (9, 3), (12, 4), (15, 5)\}]$

2 Dati $A = \{x \in N \mid x \leq 5\}$ e $B = \{2, 4, 5, 6, 10\}$ rappresenta con un diagramma cartesiano la relazione $\mathscr{R}$ definita da $p(x, y)$: «$y = 2x$» con $x \in A$ e $y \in B$. Quali sono il dominio e il codominio della relazione? $[D = \{1, 2, 3, 5\}; C = \{2, 4, 6, 10\}]$

3 Dati $A = \{x \in N \mid x \leq 5\}$ e $B = \{0, 2, 4, 5, 6, 10\}$ rappresenta con una tabella a doppia entrata la relazione $\mathscr{R}$ definita da $p(x, y)$: «$x < y$» con $x \in A$ e $y \in B$. Quali sono il dominio e il codominio della relazione? $[D = A, C = B - \{0\}]$

4 Dati $A = \{x \in N \mid 2 \leq x \leq 6\}$ e $B = \{y \in N \mid y \leq 3\}$ rappresenta mediante rappresentazione sagittale la relazione $\mathscr{R}$ definita da $p(x, y)$: «$x > y$» con $x \in A$ e $y \in B$. Quali sono le immagini di 2? E le controimmagini di 3? [0 e 1; 4, 5, 6]

5 Dati gli insiemi $A = \{x \in N \mid x \text{ è un numero primo minore di } 15\}$ e $B = \{y \in N \mid y \leq 20\}$ sia R la relazione definita all'enunciato aperto $p(x, y)$: «x è un fattore della scomposizione di y»; rappresenta R nel modo che ritieni più opportuno e indica quali sono:

a. il dominio e il codominio della relazione [$D = A$; $C = B$]

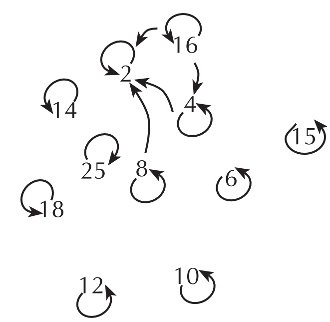
b. le immagini di 3 [$3, 6, 9, 12, 15, 18$]

b. le controimmagini di 15 e di 20. [$15 : 1, 3, 5$; $20 : 1, 2, 5$]

6 **ESERCIZIO GUIDATO**

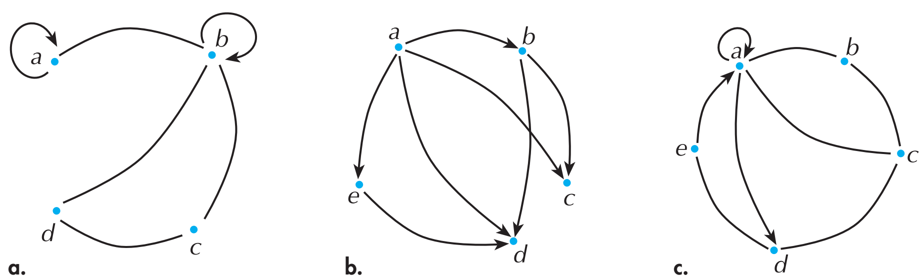
Dato l'insieme $A = \{x \in N \mid x = 2n + 2, n < 10\}$, individua le proprietà della relazione definita dall'enunciato aperto $p(x, y)$: «x è potenza di y».

Conviene rappresentare la relazione con un grafo.
Da esso deduciamo che, poichè ogni numero è potenza di sè stesso con esponente 1, la relazione è ....
Non ci sono poi archi doppiamente orientati, quindi la relazione è ....
Osservando poi la terna 16-4-2, si può dedurre che vale la proprietà ....



7 Rappresenta con un grafo la relazione definita dell'enunciato aperto «x è multiplo di y» nell'insieme $A = \{3, 6, 9, 12\}$ e individuane le proprietà. [R, AS, T]

8 Individua le proprietà delle relazioni rappresentate dai seguenti grafi:



[**a**. S; **b.** AR, AS, T; **c.** nessuna proprietà]

9 Individua le proprietà delle relazioni rappresentate dalle seguenti tabelle a doppia entrata:

a.

	a	b	c	d
a	1	1	0	0
b	0	1	0	0
c	0	1	1	1
d	0	1	0	1

b.

	a	b	c	d
a	0	1	1	0
b	1	0	1	0
c	1	1	0	1
d	0	0	1	0

[**a**. R, T, AS; **b.** AR, S]

Individua le proprietà delle seguenti relazioni.

10 In N : **a.** «a divide b» **b.** «$x + y < 10$» [**a**. R, AS, T; **b.** S]

11 In un insieme di persone:

a. «x ha gli stessi genitori di y»

b. «x è fratello di y»

c. «x lavora nello stesso ufficio di y»
(Suggerimento: nel caso **b.** due persone sono fratelli se hanno lo stesso padre o la stessa madre, non è necessario che entrambi i genitori siano gli stessi) [**a.** R, S, T; **b.** AR, S; **c.** R, S, T]

12 Nell'insieme dei poligoni del piano:
a. «x ha la stessa area di y»
b. «x ha lo stesso perimetro di y» [**a.** R, S, T; **b.** R, S, T]

13 Nell'insieme delle parole del vocabolario della lingua italiana:
a. «avere lo stesso numero di lettere»
b. «avere un numero di lettere minore» [**a.** R, S, T; **b.** AR, AS, T]

14 Considera la relazione $\mathscr{R}$ definita da $p(x, y)$: «x è nato lo stesso mese di y». Individuane le proprietà e stabilisci se si tratta di una relazione particolare. [R, S, T; equivalenza]

15 Riconsidera le relazioni degli esercizi 11, 12 e 13 e stabilisci se si tratta di relazioni particolari.

16 **ESERCIZIO GUIDATO**

E' data la relazione $p(x, y)$: «x non è primo con y» definita nell'insieme $A = \{2, 4, 8, 10, 3, 9, 27, 81\}$; individua le sue proprietà e stabilisci se si tratta di una relazione di equivalenza.

Ricordiamo che due numeri sono primi fra loro se non hanno divisori comuni al di fuori dell'unità; la relazione di cui dobbiamo studiare le proprietà indica quindi che $x \mathscr{R} y$ solo se i due numeri hanno almeno un divisore comune oltre l'1. [R, S, T; equivalenza]

17 Considera la relazione $\mathscr{R}$ in un insieme A che individua le seguenti coppie:
$(1,1), (1,2), (1,5), (2,1), (2,2)(2,5), (3,3), (3,4), (4,3), (4,4), (5,1), (5,2), (5,5), (6,6)$
E' una relazione d'equivalenza? In caso affermativo, scrivi l'insieme A e l'insieme quoziente.
[$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ $\{\{1, 2, 5\}, \{3, 4\}, \{6\}\}$]

18 **ESERCIZIO GUIDATO**

Considera la relazione di inclusione fra insiemi; stabilisci se si tratta di una relazione d'ordine e, in caso affermativo, se essa induce un ordinamento parziale o totale.

La relazione di inclusione è:

- riflessiva perchè di ogni insieme A si può dire che $A \subseteq A$
- antisimmetrica perchè se $A \subseteq B$ non capita mai che sia $B \subseteq A$ a meno che sia $A = B$
- transitiva perchè se $A \subseteq B$ e $B \subseteq C$ allora $A \subseteq C$.

Si tratta quindi di una relazione d'ordine largo. L'ordinamento indotto è però parziale perchè ....

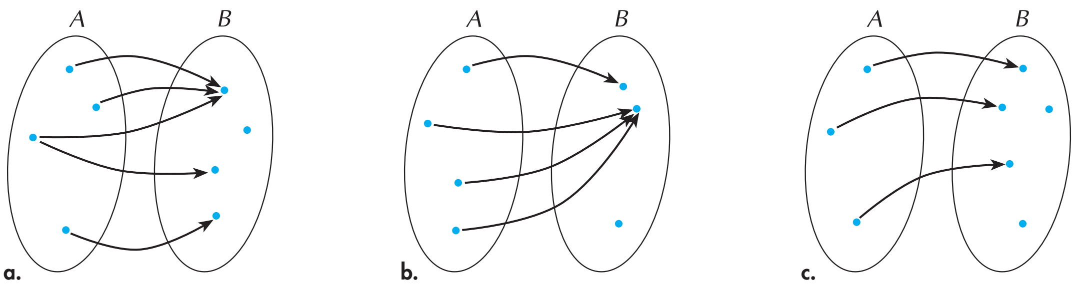
19 Considera la relazione $\mathscr{R}$ definita in un insieme A che individua le seguenti coppie:

$$(c, b), (c, a), (c, d), (b, a), (b, d), (a, d)$$

Dopo aver individuato l'insieme A, verifica che si tratta di una relazione d'ordine e stabilisci poi se si tratta di ordinamento totale o parziale e scrivi gli elementi ordinati.
[$A = \{a, b, c, d\}$; c, b, a, d]

20 Supponiamo che esista un sistema di governo in cui ogni cittadino può delegarne un altro come suo rappresentante, il quale a sua volta può delegarne un altro e così via in modo però che non possa essere delegato un cittadino che a sua volta ne ha delegato un altro e che un cittadino non possa essere delegato più volte. Verifica che si tratta di una relazione d'ordine e individua il tipo di ordinamento. [parziale]

21 Individua quali fra le seguenti relazioni fra gli insiemi A e B rappresentano delle funzioni:



[**b.**, **c.**]

22 Dati gli insiemi $A = \{a, b, c, d\}$ e $B = \{e, f, g, h, i\}$ stabilisci quali delle seguenti relazioni, rappresentate dalle coppie elencate, sono funzioni.

a. $(a, h)(c, f), (d, h)$

b. $(a, e), (d, g), (b, f), (c, f), (d, h)$

c. $(a, e), (d, g), (b, f), (c, f)$ [**c.**]

23 Considerato l'insieme A come dominio, determina il codominio della funzione f assegnata in ciascuno dei seguenti casi:

a. $A = \{3, 9, 15, 27\}$ $f(x) = \frac{1}{3}x + 1$ [$\{2, 4, 6, 10\}$]

b. $A = \{2, 3, 5, 7\}$ $f(x) = x^2 - 2$ [$\{2, 7, 23, 47\}$]

c. $A = \{0, 1, 5, 9\}$ $f(x) = 3x - 2$ [$\{-2, 1, 13, 25\}$]

24 Dati gli insiemi $A = \{10, 20, 30, 40, 60, 400\}$, $A' = \{10, 20, 30, 40, 60\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 6\}$, $C = \{1, 2, 3, 5, 6\}$, considera la relazione R : «x ha la prima cifra uguale a y». Stabilisci in quali dei seguenti casi si può parlare di funzione e di esse descrivi le caratteristiche:

a. $x \in A$ e $y \in B$ [funzione suriettiva]

b. $x \in A$ e $y \in C$ [non è una funzione]

c. $x \in A'$ e $y \in B$ [funzione biiettiva]

ESERCIZI DI APPROFONDIMENTO

1 Sia R la relazione definita dall'enunciato aperto «$x - y$ è multiplo di 3» nell'insieme Z. Verifica che si tratta di una relazione di equivalenza e individua le classi di equivalenza.

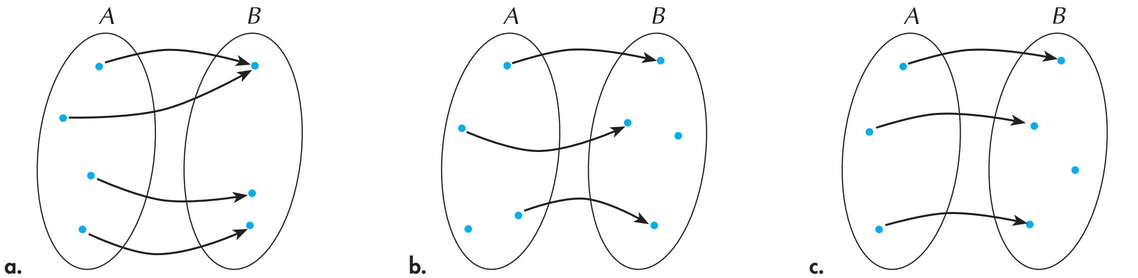
2 Nell'insieme delle parti di un insieme A considera la relazione $X \mathcal{R} Y$ se e solo se $X \cup Y = X$; verifica che si tratta di una relazione d'ordine totale e stabilisci qual è l'ordinamento nel caso dell'insieme $A = \{1, 2, 3\}$. [$\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}$]

3 E' data la funzione $f(x) = x^2 + 1$ il cui codominio è $\{2, 5, 10\}$. Quali fra gli insiemi che seguono potrebbero essere il dominio della funzione?

$A = \{1, 2\}$ $B = \{-3, -2, 1, 2, 3\}$ $C = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ $D = \{-3, -2, -1\}$

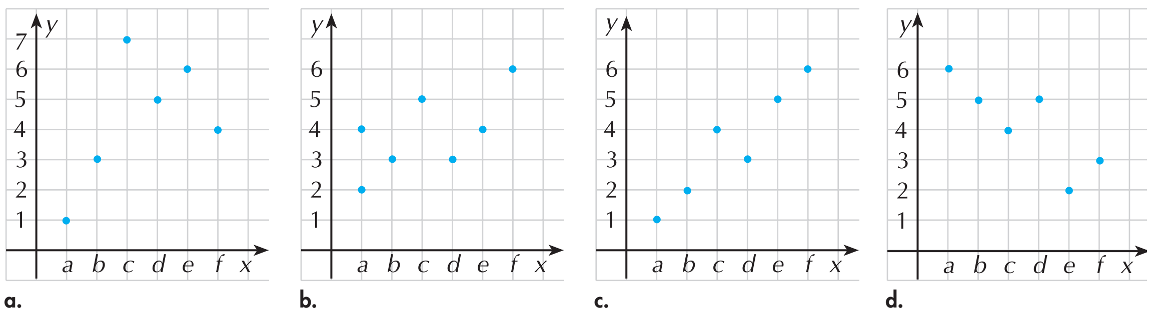
[B, D]

4 Individua quali, fra le relazioni che seguono, rappresentano delle funzioni; stabilisci poi se si tratta di funzioni suriettive, iniettive, biiettive:



[**a**. funzione suriettiva; **b.** non è una funzione; **c.** funzione iniettiva]

5 Individua quali fra le relazioni rappresentate nei diagrammi cartesiani che seguono sono delle funzioni stabilendone la eventuale tipologia.



[**a**. funzione iniettiva; **b.** non è una funzione; **c.** funzione biiettiva; **d.** funzione suriettiva]

Date le funzioni $f: Q \to Q$ *e* $g: Q \to Q$ *definite dalle seguenti relazioni, calcola* $g(f(x))$ *e* $f(g(x))$.

6 **ESERCIZIO SVOLTO**

$f: x \to \frac{1}{2}x \qquad g: x \to x+1$

La funzione $g(f(x))$ si ottiene sostituendo $\frac{1}{2}x$ al posto di x nella funzione g :

$$g(f(x)) = \frac{1}{2}x + 1$$

La funzione $f(g(x))$ si ottiene sostituendo $x+1$ al posto di x nella funzione f :

$$f(g(x)) = \frac{1}{2}(x+1)$$

7 $f: x \to x-3$ $\qquad g: x \to 2x$ $\qquad \left[g(f(x)) = 2(x-3);\ f(g(x)) = 2x-3\right]$

8 $f: x \to x^2+2$ $\qquad g: x \to x - \frac{3}{4}$ $\qquad \left[g(f(x)) = x^2 + \frac{5}{4};\ f(g(x)) = x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{41}{16}\right]$

9 $f: x \to \frac{1}{4}x^2 - 1$ $\qquad g: x \to 4x-3$ $\qquad \left[g(f(x)) = x^2 - 7;\ f(g(x)) = 4x^2 - 6x + \frac{5}{4}\right]$

10 $f: x \to x^2 + x$ $\qquad g: x \to x+1$ $\qquad \left[g(f(x)) = x^2 + x + 1;\ f(g(x)) = x^2 + 3x + 2\right]$