

Corso di accoglienza matricole 2010 – gruppo C
Esercizi per casa 5

Trigonometria

Misura degli angoli in radianti

Calcolare l'ampiezza in gradi dei seguenti angoli dati in radianti:

$$\frac{\pi}{3}, \quad \frac{\pi}{6}, \quad \frac{2}{5}\pi, \quad \frac{5}{9}\pi, \quad \frac{7}{4}\pi, \quad \frac{3}{8}\pi, \quad 5\pi, \quad \frac{5}{12}\pi$$

Esprimere in frazioni di π la misura in radianti dei seguenti angoli:

$120^\circ, 210^\circ, 225^\circ, 315^\circ, 330^\circ, 750^\circ, 80^\circ, 320^\circ, 300^\circ, 54^\circ, 36^\circ, 75^\circ, 108^\circ, 144^\circ$

Funzioni goniometriche e relazioni tra di esse

Semplificare le seguenti espressioni¹

- 1) $3 \cos \frac{\pi}{2} - 2 \sin \pi + 4 \sin \frac{3}{2}\pi$ [−4]
- 2) $4 \cos \pi + 4 \sin \frac{\pi}{2} + 3 \sin \pi$ [0]
- 3) $\frac{6 \cos 2\pi - 3 \sin 2\pi}{2 \sin 2\pi + 3 \cos 2\pi}$ [2]
- 4) $2 \sin \frac{\pi}{2} - 4(\sin \pi - 4 \cos \pi) + \frac{3 - \operatorname{tg} 0}{3 \sin \frac{\pi}{2}}$ [−13]
- 5) $(m + n)^2 \cos 0 + 4mn \cos \pi$ [(m − n)²]
- 6) $\operatorname{cosec} \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha$ [1]
- 7) $\cos^2 \alpha (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{cotg} \alpha)^2 + (\operatorname{cosec}^2 \alpha + \sec^2 \alpha) \sin^2 \alpha$ [$\frac{1}{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}$]

Semplificare le seguenti espressioni, sfruttando le relazioni fondamentali tra le funzioni

- 1) $\sec \alpha - \cos \alpha - \sin \alpha \operatorname{tg} \alpha$ [0]
- 2) $\operatorname{cosec}^2 \alpha - 1 - \operatorname{cotg}^2 \alpha$ [0]
- 3) $\sec \alpha \cos^2 \alpha - \sin \alpha \operatorname{tg} \alpha - \sec \alpha \sin \alpha (\sin \alpha - \sin \pi)$ [cos α]
- 4) $\operatorname{tg} \alpha \cos \alpha - \sin \alpha + \operatorname{tg} \alpha - \sin \alpha \sec \alpha$ [0]
- 5) $(\operatorname{tg} \alpha \sin \alpha + \cos \alpha) \sec \alpha - \operatorname{tg}^2 \alpha$ [1]
- 6) $(\operatorname{tg}^2 \alpha - 1) \cos^2 \alpha$ [1]

¹Si ricordi che $\sec(x) = \frac{1}{\cos(x)}$ (“secante”) e $\operatorname{cosec}(x) = \frac{1}{\sin(x)}$ (“cosecante”)

Calcolare il valore delle rimanenti funzioni goniometriche, sapendo che

- 1) $\sin \alpha = \frac{8}{17}, \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$
- 2) $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$
- 3) $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{3}{2}, \quad \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$
- 4) $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \frac{3}{2}\pi < \alpha < 2\pi$
- 5) $\operatorname{cotg} \alpha = \frac{12}{5}, \quad \sin \alpha < 0$
- 6) $\operatorname{cosec} \alpha = \frac{3}{2}, \quad \cos \alpha < 0$

Trasformare le espressioni seguenti in altre contenenti solo $\sin \alpha$

- 1) $\operatorname{tg}^2 \alpha + \sin^2 \alpha + 2 \cos^2 \alpha$
- 2) $\sin \alpha \cos^2 \alpha + \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\cos \alpha} - \frac{\operatorname{cotg} \alpha}{\cos \alpha \sin \alpha}$
- 3) $\operatorname{tg}^2 \alpha + \sin \alpha \cos^2 \alpha + \frac{\sec^2 \alpha - 1}{\sec \alpha}$

Trasformare le espressioni seguenti in altre contenenti solo $\cos \alpha$

- 1) $\operatorname{cosec}^2 \alpha + \frac{1}{\operatorname{cotg}^2 \alpha} - \cos^2 \alpha \operatorname{tg}^2 \alpha + \frac{1}{\sec^2 \alpha}$
- 2) $2 \operatorname{cotg}^2 \alpha \cos \alpha - 3 \operatorname{tg} \alpha \sin \alpha (1 - \operatorname{cosec}^2 \alpha)$
- 3) $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 + (\sin \alpha - \cos \alpha)^2$

Semplificare le seguenti espressioni

- 1) $\sin(\pi + \alpha) \sin(\pi - \alpha) - \cos(\pi + \alpha) \cos(\pi - \alpha)$ [−1]
- 2) $\sin(\frac{\pi}{2} + \alpha) \sin(\pi - \alpha) + \cos(\frac{\pi}{2} + \alpha) \cos(\pi + \alpha)$ [2 \sin \alpha \cos \alpha]
- 3) $\sin(3\pi - \alpha) \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) - \sin(3\pi + \alpha) \sin(-\alpha)$ [2 \sin^2 \alpha]
- 4) $\cos(\frac{5}{2} + \alpha) \cos(\frac{5}{2} - \alpha) - \sin(\pi + \alpha) \sin(\pi - \alpha)$ [0]
- 5) $\sin(x + \frac{\pi}{6}) \cos y - \cos x \cos(y + \frac{\pi}{3}) - \cos \frac{\pi}{6} \sin(x + y)$ [0]
- 6) $\frac{2 \sin(\frac{\pi}{4} - x)}{\cos(x + \frac{\pi}{4}) + \cos(x - \frac{\pi}{4})}$ [1 - \operatorname{tg} x]
- 7) $\frac{\sqrt{2} \cos(\frac{3}{4}\pi + x)}{\cos(x + \frac{2}{3}\pi) + \cos(x - \frac{2}{3}\pi)}$ [\operatorname{tg} x + 1]
- 8) $\sin \alpha + \cos(\alpha + \frac{\pi}{6}) + \cos(\alpha + \frac{5}{6}\pi)$ [0]
- 9) $\frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin(\alpha - \beta)} - \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}$ [0]
- 10) $\frac{\sin(\alpha + \frac{\pi}{3}) + \sin(\alpha - \frac{\pi}{3}) - 2 \sin \alpha}{\cos(\alpha + \frac{\pi}{3}) + \cos(\alpha - \frac{\pi}{3}) - 2 \cos \alpha}$ [\operatorname{tg} \alpha]
- 11) $\frac{\cos 2\alpha}{\cos \alpha + \sin \alpha}, \quad \frac{\sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}, \quad \frac{\cos \alpha \cdot \cos 2\alpha}{2 \cos \alpha - \sin 2\alpha}$
- 12) $\frac{\sin 2\alpha(\sin \alpha + \cos \alpha)}{1 + \sin 2\alpha - \cos 2\alpha}$ [\cos \alpha]

Equazioni goniometriche

Equazioni goniometriche elementari

Determinare

- 1) gli $\alpha \in [0, 2\pi]$, $\alpha \in [-\pi, 3\pi]$ tali che $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$
- 2) gli $\alpha \in [0, 4\pi]$, $\alpha \in [-7\pi, -5\pi]$ tali che $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
- 3) gli $\alpha \in [0, \pi]$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{6}, \frac{7}{6}\pi\}$ tali che $\tan \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$
- 4) gli $\alpha \in \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq \frac{\pi}{3}\}$, $[-\pi, \pi]$ tali che $\cos \alpha = \frac{1}{2}$
- 5) gli $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che $\sin \alpha = \frac{\sqrt{6}}{2}$
- 6) gli $\alpha \in [-2\pi, 2\pi]$ tali che $\sin(2\alpha) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
- 7) gli $\alpha \in [4\pi, 6\pi]$ tali che $\tan(3\alpha) = \sqrt{3}$
- 8) gli $\alpha \in [0, 2\pi]$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{3}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi\}$ tali che $\tan \alpha = -1$
- 9) gli $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che $\cos^2 \alpha = 1$
- 10) gli $\alpha \in [-\pi, \pi]$ tali che $\tan^2 \alpha = \frac{1}{3}$
- 11) gli $\alpha > 0$ tali che $\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
- 12) gli $\alpha < 0$ tali che $\sin^2 \alpha = \frac{3}{4}$
- 13) gli $\alpha \in [-\pi, \pi]$, $\alpha \in [0, 2\pi]$ tali che $\sin(\frac{5}{3}\pi) = \frac{1}{2}$
- 14) gli $\alpha \in [0, 2\pi]$ tali che $\cos \alpha = \frac{\pi}{2}$
- 15) quante soluzioni ha in $\mathbb{R}$ l'equazione $\tan \alpha = 5$

Risolvere le seguenti equazioni (cioè trovare *tutti* gli $x \in \mathbb{R}$ tali che)

- 1) $2 \sin 2x - \sqrt{3} = 0$
- 2) $2 \cos 3x - 1 = 0$
- 3) $\sin^2 x = \frac{1}{2} \sin x$
- 4) $(\sin x - 1)(2 \sin x - 1) = 0$
- 5) $\sqrt{2} \cos^2 x - 3 \cos x + \sqrt{2} = 0$
- 6) $\tan^2 x - \tan x = 0$
- 7) $2 \sin^2 x = 3 \cos x$
- 8) $3 \cos^2 x + \sin x = 2 - \sin^2 x$
- 9) $\sin^2 x + 3 \cos x = 1 + \cos^2 x$
- 10) $\cos x = \frac{4 \sin x + 1}{\cos x}$

Equazioni goniometriche varie

- 1) $\cos x = \sin^2 x - \cos^2 x$
- 2) $\sin x + \sin x \cot^2 x = 2 \cot x$
- 3) $2 \sin^2 x + 2 \cos 2x - 1 = 0$
- 4) $(\sin x + \cos x)^2 - \sin x(1 + 2 \cos x) = 0$
- 5) $\cot^2 x - \operatorname{cosec} x = 1$
- 6) $2 \sin x \cos x - \sqrt{3} \cos x - 2 \sin^2 x + \sqrt{3} x = 0$
- 7) $\operatorname{tg} x(1 - \cos x) = \sec x - 1$
- 8) $2 \sin x \cos x + 2 \cos x = 1 + \sin x$
- 9) $\cot x + 1 = \operatorname{cosec} x + \cos x$
- 10) $4 \sin x \cos^2 x = 1 + \sin x$
- 11) $\frac{\cot x}{1 + \cot^2 x} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x$
- 12) $\operatorname{tg} x + 2 = \sec x + 2 \sin x$
- 13) $\sqrt{3} \cos x + \sin x = 2$
- 14) $\sin x + \cos x = 1$
- 15) $\cos x + 1 + \sqrt{3} \sin x = 0$
- 16) $2 \cos x + 2 \sin x = \sqrt{3} + 1$
- 17) $\sqrt{3} \cos x - \sin x + \sqrt{3} = 0$
- 18) $\cos x - \sin x = 1$
- 19) $\cos x + 1 + \sqrt{3} \sin x = 0$
- 20) $\sin 2x + \sqrt{3} \cos 2x = \sqrt{3}$
- 21) $\cos x + \sqrt{3} \sin x - \sqrt{3} = 0$
- 22) $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$

Disquazioni goniometriche

Determinare gli $x \in [0, 2\pi]$ tali che

- 1) $\sin x > \frac{1}{2}$
- 2) $\cos x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$
- 3) $\operatorname{tg} x < -\sqrt{3}$
- 4) $0 < \sin x \leq 1$
- 5) $-\sqrt{3} < \operatorname{tg} x < \frac{\sqrt{3}}{3}$
- 6) $-\frac{\sqrt{3}}{2} < \cos x \leq \frac{1}{2}$
- 7) $-\frac{1}{2} < \sin x < \frac{\sqrt{2}}{2}$
- 8) $\sin^2 x < \frac{1}{4}$
- 9) $\cos^2 x > \frac{1}{4}$
- 10) $\operatorname{tg}^2 x < 1$
- 11) $|2 \cos x| > \sqrt{3}$
- 12) $0 < \cos(x + \frac{\pi}{6}) < \frac{1}{2}$
- 13) $\sin(\frac{\pi}{4} - x) > \frac{\sqrt{2}}{2}$
- 14) $\operatorname{tg}(2x + \frac{\pi}{2}) > \sqrt{3}$
- 15) $\cos x(\cos x - 1) \leq 0$

Risolvere le seguenti disequazioni

- 1) $\sqrt{3} \cdot \sin x - \cos x > 0$
- 2) $2 \sin^2 x - (2 - \sqrt{3}) \sin x - \sqrt{3} \leq 0$
- 3) $4 \cos^2 x - 2(1 - \sqrt{2}) \cos x - \sqrt{2} \geq 0$
- 4) $\sin x + \sqrt{3} \cdot \cos x - 1 < 0$
- 5) $\operatorname{tg} x(1 - \cos^2 x) \geq 0$
- 6) $(\operatorname{tg}^2 x - 3)(2 \sin^2 x - 1) \leq 0$
- 7) $2 \sin^2 x - 2 \sin x \cos x + 2 \cos^2 x \geq 1$
- 8) $\cos x(3 \operatorname{tg}^2 x - 1)(\cos^2 x + \cos x) \geq 0$
- 9) $(\sqrt{3} - 2 \sin x)(2 \cos x - 1)(\cos^2 x + 1) \geq 0$

Sia ABC un triangolo rettangolo ($\alpha = \hat{A} = \frac{\pi}{2}$, $\beta = \hat{B}$, $\gamma = \hat{C}$; $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$, $c = \overline{AB}$). Trovare gli elementi (lati o angoli) incogniti

- 1) $c = 2$, $\beta = \frac{\pi}{6}$
- 2) $a = 10$, $\beta = \frac{\pi}{6}$
- 3) $b = 10$, $a = 10\sqrt{2}$
- 4) $c = 5\sqrt{3}$, $b = 5$
- 5) $b = 20$, $\beta = 30^\circ$
- 6) $b = 12\sqrt{3}$, $\gamma = 30^\circ$
- 7) $b = 14$, $\sin \beta = \frac{7}{25}$ (trovare $\cos \gamma$)
- 8) $a = 39$, $\tan \gamma = \frac{12}{5}$ (trovare $\cos \beta$)

Calcolare il perimetro e l'area di un triangolo rettangolo, sapendo che:

- 1) $b = 24$, $\sin \beta = \frac{12}{13}$
- 2) $a = 50$, $\sin \gamma = \frac{24}{25}$
- 3) $c = 8$, $\tan \beta = \frac{3}{4}$

Sia ABC un triangolo qualunque ($\alpha = \hat{A}$, $\beta = \hat{B}$, $\gamma = \hat{C}$; $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$, $c = \overline{AB}$)
Trovare gli elementi (lati o angoli) incogniti

- 1) $a = 2$, $b = 2\sqrt{3}$, $\beta = \frac{2}{3}\pi$
- 2) $a = 2(\sqrt{2} + 1)$, $c = 2 + \sqrt{2}$, $\beta = \frac{\pi}{4}$
- 3) $a = 2\sqrt{6}$, $b = 4\sqrt{3}$, $\gamma = \frac{\pi}{4}$
- 4) $a = 2\sqrt{6}$, $b = 6\sqrt{2}$, $\alpha = \frac{\pi}{6}$
- 5) $c = 2\sqrt{3}$, $b = 3\sqrt{2}$, $\alpha = 75^\circ$
- 6) $a = 2\sqrt{3}$, $b = 2\sqrt{2}$, $\alpha = 60^\circ$
- 7) $a = \sqrt{6} + \sqrt{2}$, $b = 2\sqrt{2}$, $c = 2\sqrt{3}$
- 8) $6\sqrt{3}$, $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 45^\circ$
- 9) $a = \sqrt{3} - 1$, $\alpha = 15^\circ$, $\beta = 120^\circ$
- 10) $2\sqrt{3}$, $b = 3 - \sqrt{3}$, $c = 3\sqrt{2}$