

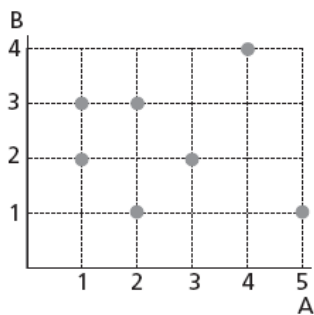
LE RELAZIONI E LE FUNZIONI

ESERCIZI

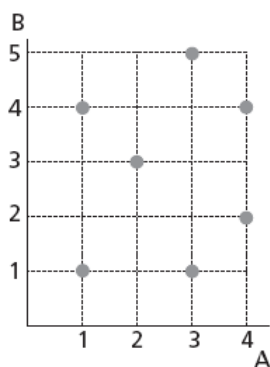
1. Le relazioni binarie e la loro rappresentazione

Rappresenta in forma sagittale e tramite una tabella a doppia entrata la seguente relazione binaria e scrivi le coppie in relazione.

1 A



1 B



Indica in forma sagittale e cartesiana la relazione binaria definita dalla seguente tabella. Scrivi le coppie in relazione.

2 A

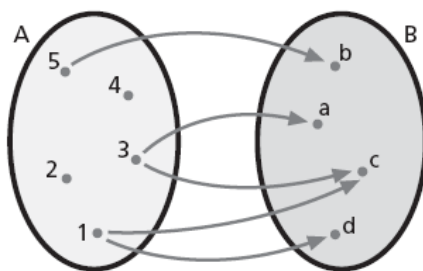
A \ B	1	2	3	4
a		x	x	x
b	x			x
c	x		x	
d		x		x
e	x			

2 B

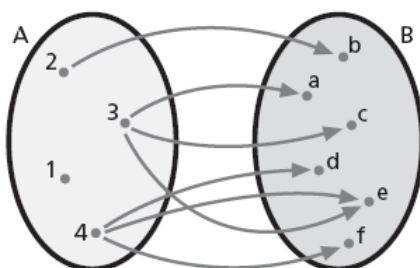
A \ B	1	2	3	4	5
a			x		x
b	x	x		x	
c			x		
d	x	x			x

Data la relazione binaria in figura, scrivi le coppie in relazione e rappresenta la relazione con una tabella a doppia entrata.

3 A



3 B



Dato l'insieme $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -4 \leq x \leq 4\}$, dai la rappresentazione cartesiana di ognuna delle relazioni in $A \times A$ definite qui di seguito.

4 A a) «La differenza fra x e y è minore di 2», con $(x; y) \in A \times A$;

b) $\mathfrak{R} = \{(x; y) \mid (x; y) \in A \times A \text{ e } x = y\}$;

c) «Il prodotto fra x e y è 1», con $(x; y) \in A \times A$.

4 B a) «Il prodotto fra x e y è 4», con $(x; y) \in A \times A$;

b) $\mathfrak{R} = \{(x; y) \mid (x; y) \in A \times A \text{ e } y = 2x\}$;

c) «La differenza fra x e y è maggiore di -1 », con $(x; y) \in A \times A$.

Scrivi il dominio e il codominio della seguente relazione binaria da A a B .

5 A $A = \{1, 3, 4, 16, 20, 25\}$, $B = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, -3 \leq x \leq 4\}$,

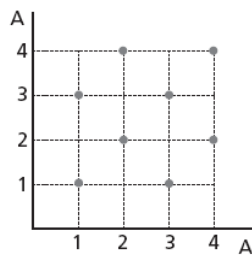
\mathfrak{R} : « x è il quadrato di y »

5 B $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, -4 \leq x \leq 4\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$,

\mathfrak{R} : « y è la differenza tra il valore assoluto di x e 1».

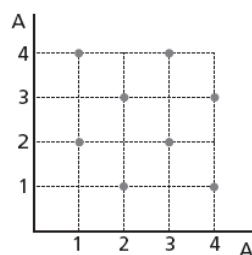
Dato l'insieme $A = \{1, 2, 3, 4\}$, scrivi l'enunciato della relazione definita in $A \times A$ rappresentata in figura.

6 A



[« $x + y$ è pari»]

6 B



[« $x + y$ è dispari»]

2. La relazione inversa

Dati gli insiemi $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid 4 < x < 9\}$ e $B = \{x \in \mathbb{Q} \mid 1 < x < 6\}$, considera la seguente relazione, definita nell'insieme $A \times B$, ed esegui le seguenti istruzioni:

- disegna la rappresentazione sagittale;
- determina la relazione inversa;
- scrivi l'insieme delle coppie che costituiscono \mathfrak{R} e quello delle coppie che costituiscono \mathfrak{R}^{-1} ;
- scrivi dominio e codominio di \mathfrak{R} e di \mathfrak{R}^{-1} .

$$7 \text{ A} \quad \mathfrak{R} = \{(x; y) \mid (x; y) \in A \times B, x - y = 3\}$$

$$7 \text{ B} \quad \mathfrak{R} = \{(x; y) \mid (x; y) \in A \times B, x - y = 2\}$$

3. Le relazioni definite in un insieme e le loro proprietà

Costruisci il grafo della relazione definita nell'insieme A .

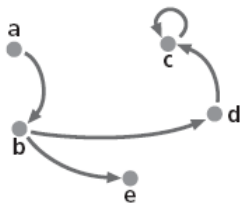
$$8 \text{ A} \quad A = \{n \mid n \in \mathbb{N}, 2 \leq n \leq 9\}, \mathfrak{R}: \text{«}x \text{ ha qualche divisore, diverso da 1, in comune con } y\text{»}$$

$$8 \text{ B} \quad A = \{n \mid n \in \mathbb{N}, 12 \leq n \leq 18\}, \mathfrak{R}: \text{«}x \text{ non ha divisori in comune con } y, \text{ escluso } 1\text{»}$$

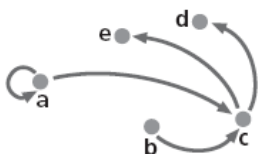
In figura è rappresentata una relazione mediante un grafo.

- Completa il grafo (aggiungendo opportune frecce) in modo che la relazione descritta risulti *riflessiva*.
- Ricopia la figura originale e completa il grafo in modo che la relazione descritta risulti *simmetrica*.
- Ricopia nuovamente la figura originale e completa il grafo in modo che la relazione descritta risulti *transitiva*.

9 A



9 B



Determina di quali proprietà, tra le seguenti, godono le relazioni assegnate: riflessiva, simmetrica, transitiva, antiriflessiva, antisimmetrica.

10 A a) « x è multiplo di y », con $(x;y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

b) Se S è l'insieme dei segmenti di un piano, « x sta sulla stessa retta di y », con $(x;y) \in S \times S$

[a) rifl., trans. e antisimm.; b) rifl. e simm. e trans.]

10 B a) « x è divisore di y », con $(x;y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

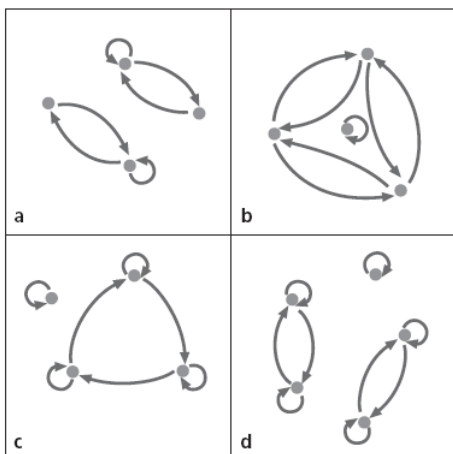
b) Se S è l'insieme dei segmenti di un piano, « x è consecutivo a y », con $(x;y) \in S \times S$

[a) rifl., trans. e antisimm.; b) rifl. e simm.]

4. Le relazioni di equivalenza

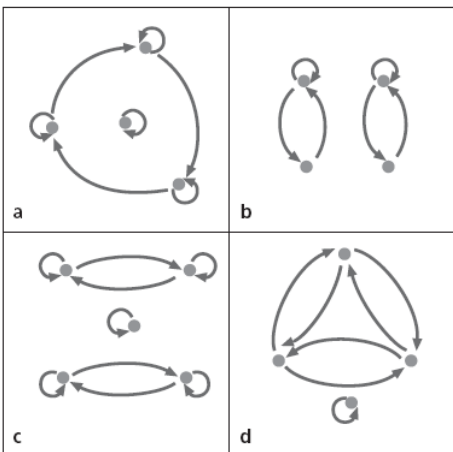
Stabilisci quali fra i seguenti grafi rappresentano relazioni di equivalenza

11 A



[soltanto d]

11 B



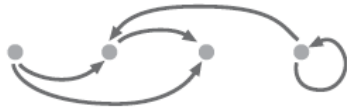
[soltanto c]

Completa il grafo seguente, aggiungendo opportune frecce, in modo che la relazione descritta risulti di equivalenza.

12 A



12 B



Stabilisci l'insieme quoziente per la relazione di equivalenza indicata nel relativo insieme.

13 A « x è nato nella stessa regione di y », nell'insieme degli italiani.

13 B « x abita nella stessa provincia di y », nell'insieme degli abitanti dell'Emilia Romagna.

Determina l'insieme quoziente dell'insieme

$A = \{\text{cane, gatto, cavallo, cammello, ghepardo, gorilla, ape coccodrillo}\}$

rispetto alla seguente relazione di equivalenza definita in A .

14 A « x inizia con la stessa lettera di y ».

14 B « x ha lo stesso numero di lettere di y ».

5. Le relazioni d'ordine

Cerca le relazioni d'ordine tra le seguenti, precisando se sono di ordine stretto o largo, totale o parziale.

15 A $A = \square$

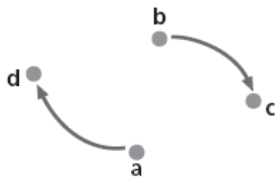
- a) « a è metà di b »;
- b) « a è multiplo di b »;
- c) « a è il doppio di b sommato a 2».

15 B A è l'insieme degli iscritti a un corso di nuoto.

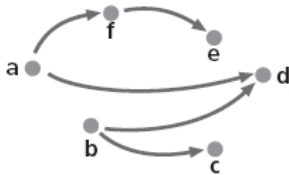
- a) « a ha il colore del costume di b »;
- b) « a è più vecchio di b »;
- c) « a ha vinto più gare di b ».

Completa con il numero minimo di frecce i seguenti grafi, in modo da ottenere una relazione d'ordine del tipo indicato alla base della figura.

16 A

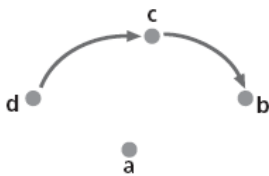


a. Ordine stretto e totale

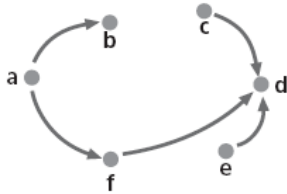


b. Ordine largo e parziale

16 B



a. Ordine stretto e totale



b. Ordine largo e parziale

6. Che cosa sono le funzioni

Dati i due insiemi $A = \{a, e, i, o\}$ e $B = \{a, b, c, d, e\}$, rappresenta le relazioni assegnate in un diagramma cartesiano e stabilisci quali tra queste sono funzioni.

- 17 A a) $\mathfrak{R} = \{(i; c), (a; e), (e; d), (o; b)\};$
 b) $\mathfrak{R} = \{(e; b), (a; e), (e; a), (i; c)\}.$

[a) è una funzione; b) non è una funzione]

- 17 B a) $\mathfrak{R} = \{(o; b), (i; d), (o; a), (e; c)\};$
 b) $\mathfrak{R} = \{(e; a), (i; c), (o; a), (a; d)\}.$

[a) non è una funzione; b) è una funzione]

Dati gli insiemi $A = \{n \in \mathbb{Z}, -2 \leq n \leq 2\}$ e $B = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq 4\}$; rappresenta la relazione \mathcal{R} da A a B in un diagramma cartesiano e stabilisci se è una funzione.

18 A a) $\mathcal{R} : \langle y = x^2 \rangle$ b) $\mathcal{R} : \langle y = x + 3 \rangle$ [a) è una funzione; b) non è una funzione]

18 B a) $\mathcal{R} : \langle y = 2 - x^2 \rangle$ b) $\mathcal{R} : \langle y = x + 2 \rangle$ [a) non è una funzione; b) è una funzione]

19 A Sono dati gli insiemi $A = \{2, 3, 4\}$ e $B = \{a, b, c, d\}$. Rappresenta in modo sagittale e con un diagramma cartesiano la funzione $f : A \rightarrow B$ così definita: $a = f(2)$, $b = f(3)$, $c = f(4)$. Determina infine il codominio della funzione.

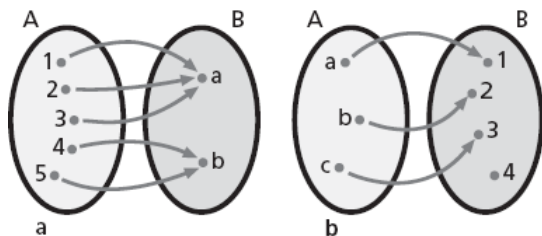
$$[C = \{a, b\}]$$

19 B Sono dati gli insiemi $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{x, y, z, t\}$. Rappresenta in modo sagittale e con un diagramma cartesiano la funzione $f : A \rightarrow B$ così definita: $y = f(2)$, $x = f(3)$, $t = f(1)$. Determina infine il codominio della funzione.

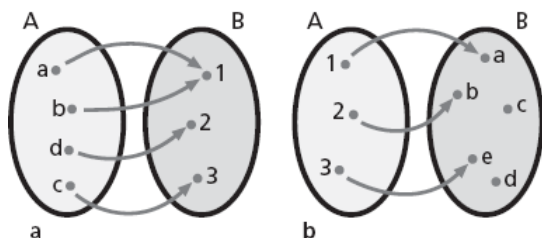
$$[C = \{y, z\}]$$

Rappresenta con un diagramma cartesiano le funzioni definite mediante le rappresentazioni sagittali seguenti.

20 A



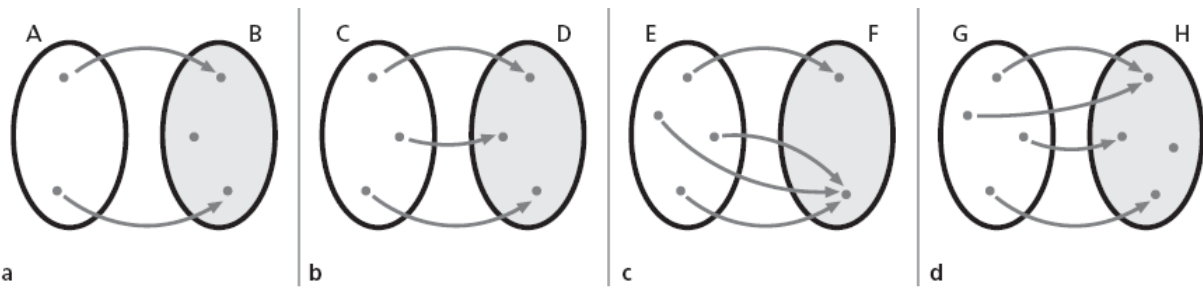
20 B



7. Le funzioni suriettive, iniettive e biiettive

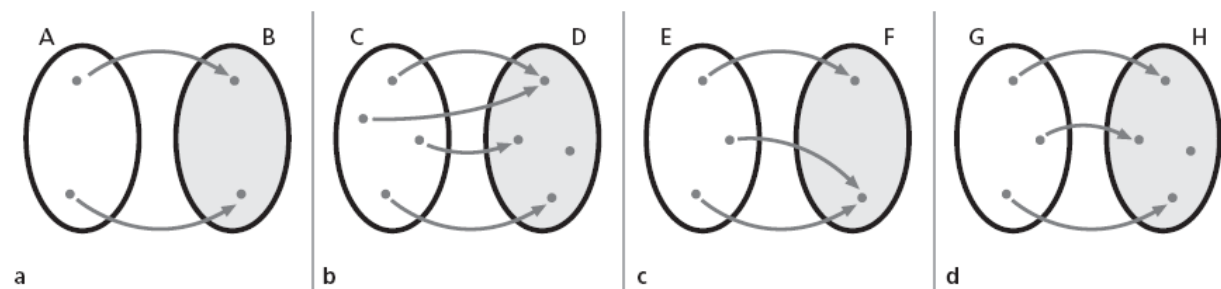
Stabilisci se le seguenti funzioni, definite mediante rappresentazione sagittale, sono iniettive, suriettive o biiettive.

21 A



[a) iniettiva; b) biiettiva; c) suriettiva; d) né iniettiva né suriettiva]

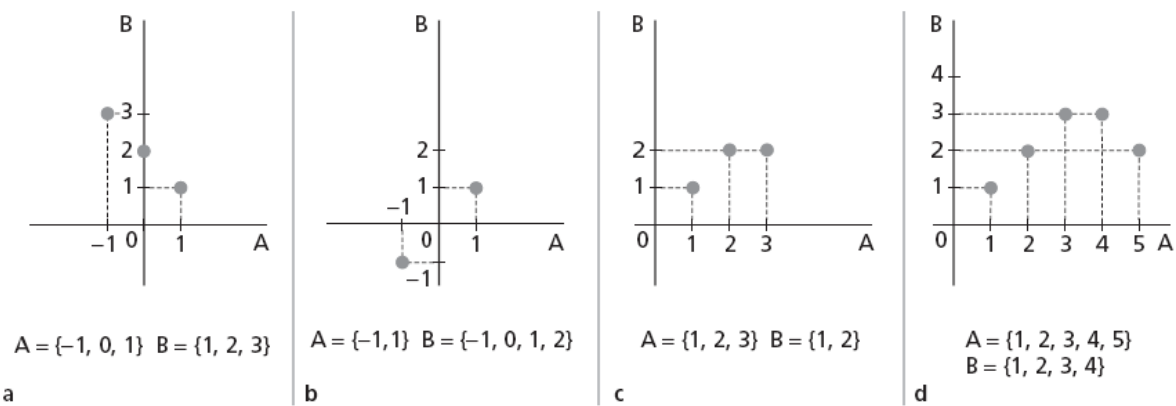
21 B



[a) biiettiva; b) né iniettiva né suriettiva; c) suriettiva; d) iniettiva]

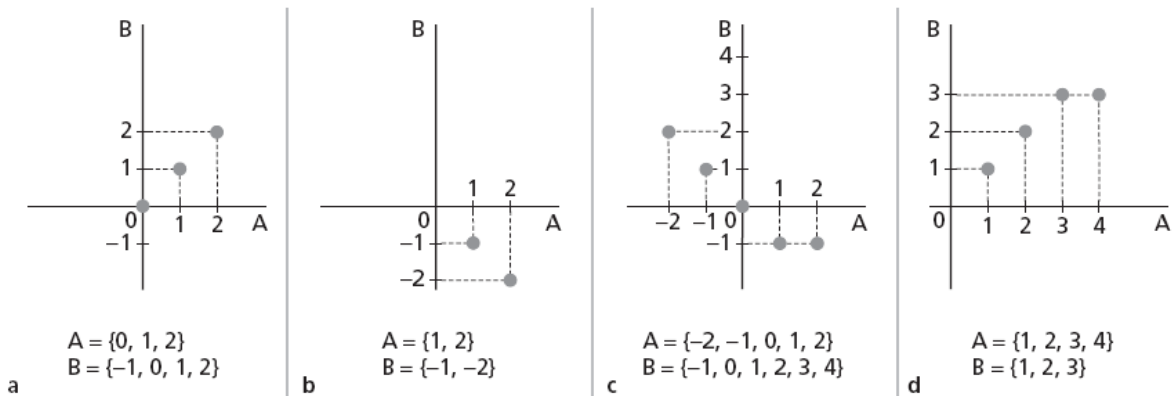
Stabilisci se le seguenti funzioni, rappresentate con un diagramma cartesiano, sono iniettive, suriettive o biiettive.

22 A



[a) biiettiva; b) iniettiva; c) suriettiva; d) né iniettiva né suriettiva]

22 B



[a) iniettiva, b) biiettiva; c) né iniettiva né suriettiva; d) suriettiva]

8. La funzione inversa

23 A Rappresenta in modo sagittale le relazioni inverse alle funzioni dell'esercizio 21 A e stabilisci quali sono funzioni.

23 B Rappresenta in modo sagittale le relazioni inverse alle funzioni dell'esercizio 21 B e stabilisci quali sono funzioni.

9. La composizione di due funzioni

Rappresenta le due funzioni con un diagramma sagittale e stabilisci se sono possibili le composizioni $f \circ g$ e $g \circ f$.

24 A $A = \{a\}$, $B = \{z\}$, $C = \{x\}$;

$f : a \mapsto z$; $g : z \mapsto x$.

24 B $A = \{q\}$, $B = \{r\}$, $C = \{w\}$;

$f : q \mapsto r$; $g : r \mapsto w$.

Dati gli insiemi A e B e le funzioni $f : A \rightarrow B$ e $g : B \rightarrow A$, rappresenta con un diagramma sagittale le funzioni f , g , $f \circ g$, $g \circ f$ e stabilisci se sono iniettive, suriettive o biiettive.

25 A $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 2\}$.

$$f : \begin{cases} 1 \mapsto 1 \\ 2 \mapsto 1 \\ 3 \mapsto 1 \\ 4 \mapsto 1 \end{cases} \quad g : \begin{cases} 1 \mapsto 1 \\ 2 \mapsto 3 \end{cases}$$

25 B $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2, 3\}$.

$$f: \begin{cases} 1 \mapsto 1 \\ 2 \mapsto 2 \\ 3 \mapsto 2 \end{cases} \quad g: \begin{cases} 1 \mapsto 3 \\ 2 \mapsto 1 \\ 3 \mapsto 2 \end{cases}$$

10. Le funzioni numeriche

Per ogni funzione costruisci una tabella con dieci valori (positivi e negativi) e rappresentane il grafico.

26 A $y = -3x$; $y = -x^2 + 3$.

26 B $y = -4x$; $y = -x^2 + 4$.

Determina il campo di esistenza delle seguenti funzioni definite in \mathbb{R} .

27 A $y = \frac{3}{2x-3}$; $y = \sqrt{\frac{-2}{2-x}}$ $\left[x \neq \frac{3}{2}; x > 2 \right]$

27 B $y = \frac{3}{3x+4}$; $y = \sqrt{\frac{3}{3-x}}$ $\left[x \neq -\frac{4}{3}; x < 3 \right]$

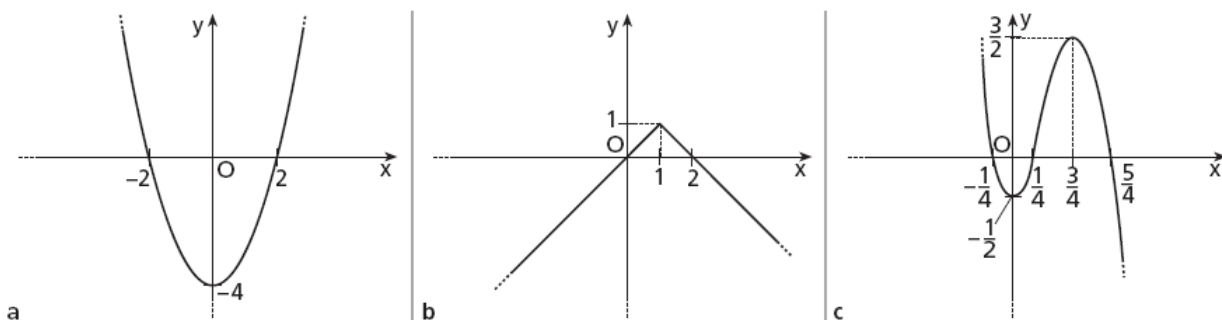
In un diagramma cartesiano disegna per punti la seguente funzione. Indica se è biiettiva o scegli un sottoinsieme di \mathbb{R} affinché lo diventi.

28 A $y = 3x - 1$; $y = x^2 - 2$.

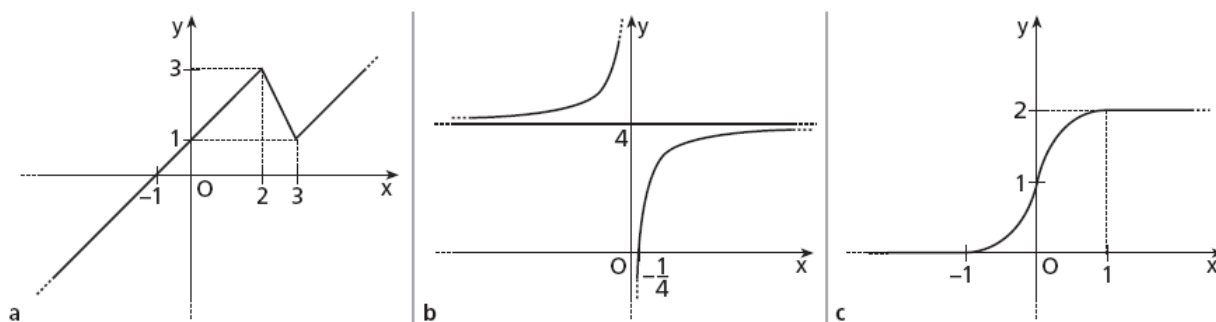
28 B $y = 4x + 1$; $y = x^2 + 3$.

Per ognuna delle seguenti funzioni $f: A \rightarrow B$ rappresentate in figura, indica opportuni sottoinsiemi di \mathbb{R} che si possono prendere come insiemi di partenza A e di arrivo B in modo che le funzioni risultino biunivoche.

29 A



29 B



11. Particolari funzioni numeriche

Considera le seguenti tabelle e stabilisci se x e y sono direttamente proporzionali, inversamente proporzionali o se vi è una proporzionalità quadratica. Scrivi l'espressione analitica delle funzioni e rappresentale nel piano cartesiano.

30 A

x	y	x	y
-2	-1	3	1
-1	$-\frac{1}{2}$	1	3
0	0	-1	-3
1	$\frac{1}{2}$	-3	-1
2	1	-6	$-\frac{1}{2}$

[prop. diretta, $y = \frac{1}{2}x$; prop. inversa, $y = \frac{3}{x}$]

30 B

x	y	x	y
3	1	-2	-8
2	$\frac{2}{3}$	-1	-2
1	$\frac{1}{3}$	0	0
0	0	1	-2
-1	$-\frac{1}{3}$	2	-8

[prop. diretta, $y = \frac{1}{3}x$; prop. quadratica, $y = -2x^2$]

Date le seguenti tabelle, stabilisci se tra x e y c'è una dipendenza lineare. In caso affermativo, scrivi la corrispondente funzione e rappresentala nel piano cartesiano.

31 A

x	y
-1	1
0	-1
$\frac{1}{2}$	-2
2	-5
3	-7

x	y
-9	-1
-2	$\frac{4}{3}$
0	2
3	3
4	$\frac{10}{3}$

$$\left[y = -2x - 1; y = \frac{1}{3}x + 2 \right]$$

31 B

x	y
$-\frac{1}{3}$	6
$\frac{1}{3}$	4
1	2
2	-1
4	-7

x	y
-3	$\frac{5}{2}$
-2	2
1	$\frac{1}{2}$
2	0
4	-1

$$\left[y = -3x + 5; y = -\frac{1}{2}x + 1 \right]$$

32 A Scrivi la funzione $y = f(x)$ corrispondente alla proporzionalità

- a) diretta,
- b) quadratica,
- c) inversa,

sapendo che per $x = 2$ risulta $y = 8$

$$\left[\text{a) } y = 4x; \text{ b) } y = 2x^2; \text{ c) } y = \frac{16}{x} \right]$$

32 B Scrivi la funzione $y = f(x)$ corrispondente alla proporzionalità

- a) diretta,
- b) quadratica,
- c) inversa,

sapendo che per $x = 3$ risulta $y = 6$

$$\left[\text{a) } y = 2x; \text{ b) } y = \frac{2}{3}x^2; \text{ c) } y = \frac{18}{x} \right]$$

Disegna in un diagramma cartesiano i grafici delle seguenti funzioni lineari.

33 A $y = 2x + 3$; $y = -\frac{1}{2}x + 3$; $y = 2x - 3$; $y = -\frac{1}{2}x - 3$.

33 B $y = x - 2$; $y = -x + 2$; $y = -x - 2$; $y = x + 2$.

Per le seguenti funzioni costruisci una tabella con cinque valori (positivi, negativi o nulli) e rappresenta il grafico.

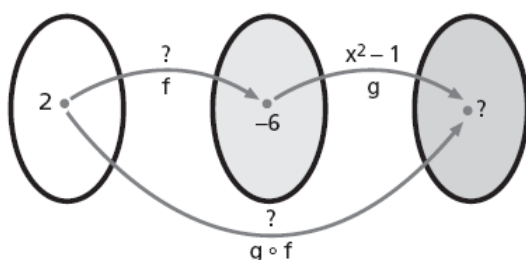
34 A $y = \frac{3}{2}|x| - 2$; $y = -\frac{1}{2}|x| + 4$.

34 B $y = \frac{2}{3}|x| - 1$; $y = -\frac{|x|}{3} + 3$.

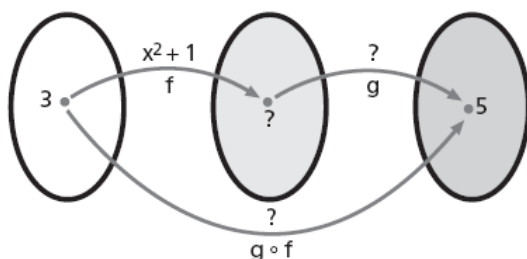
12. La composizione di due funzioni numeriche

Completa il seguente diagramma sagittale.

35 A



35 B



Per ogni coppia di funzioni f e g da \square in \square determina: $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$, $g \circ g$.

36 A $f : x \mapsto 3x$; $g : x \mapsto 2x^2 - 2$.

$[6x^2 - 6; 18x^2 - 2; 9x; 8x^4 - 16x^2 + 6]$

36 B $f : x \mapsto 5x$; $g : x \mapsto 3x^2 - 4$.

$[15x^2 - 20; 75x^2 - 4; 25x; 27x^4 - 72x^2 + 44]$

Per ognuna delle seguenti funzioni, cerca due funzioni dalla cui composizione si ottenga la funzione data.

$$37 \text{ A} \quad y = \frac{1}{2}x^2 - 2; \quad y = |x - 3| + 1; \quad y = \frac{1}{x} + 4.$$

$$37 \text{ B} \quad y = -\frac{1}{6}x^2 + 3; \quad y = 2 - |x + 5|; \quad y = \frac{8}{x^2 + 1}.$$

Data la funzione $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, scrivi il codominio della funzione e determina la sua funzione inversa.

$$38 \text{ A} \quad A = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x \geq 0\}, f : x \mapsto \frac{4}{x+2}.$$

$$38 \text{ B} \quad A = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x \geq -1\}, f : x \mapsto -\frac{1}{x+5}.$$