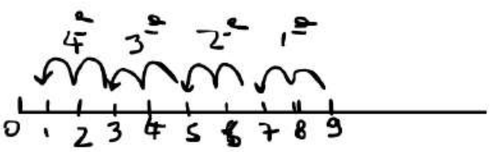
La divisione in N

E' possibile effettuare questa operazione attraverso gli assiomi di Peano?

SI, MA IN MODO INDIRETTO

ES. $9 : 2 = 4 \text{ R } 1$

$$\begin{array}{r|l} 9 & 2 \\ \hline 8 & 4 \\ \hline 1 & \end{array}$$



$p(p(9)) = 7$

$p(p(7)) = 5$

$p(p(5)) = 3$

$p(p(3)) = 1$

$p(p(1)) = ?$

Partendo dal dividendo (9) effettuo l'operazione di precedente tante volte quanto mi dice il divisore (2) e conto quanti vengono gruppi vengono fuori. Il numero dei gruppi mi restituisce il risultato della divisone (quoziente, detto quoto solamente se non c'è resto).

Your paragraph text

$9 : 2 = 4 \ r \ 1$ $\Rightarrow$ $\boxed{\underline{9} = \underline{2} \cdot \underline{4} + \underline{1}}$

DIVIDENDO	DIVISORE	QUOZIENTE	RESTO
a	b	q	r

$$\boxed{a = b \cdot q + r}$$

Algoritmo della divisione numerica

La divisone crea problemi nell'insieme dei numeri naturali? SI

$$\underset{\in \mathbb{N}}{9} : \underset{\in \mathbb{N}}{2} = \underset{\notin \mathbb{N}}{4,5}$$

Questa operazione non soddisfa alcuna proprietà tranne l'esistenza dell'elemento neutro, in questo caso 1.

es $\boxed{9 : 1 = 9}$

Proprietà distributiva

$$\boxed{(a+b)\cdot c = a\cdot c + b\cdot c} \quad \forall a, b, c \in \mathbb{N}$$

ES. $(2+3)\cdot 4 = 2\cdot 4 + 3\cdot 4 = 8 + 12 = 20$

$5\cdot 4 = 20$

$$\boxed{(a+b):c = a:c + b:c} \quad \forall a, b, c \in \mathbb{N}$$

ES $(4+2):2 = 4:2 + 2:2 = 2 + 1 = 3$ $\quad \boxed{6:2=3}$

POTENZA

a^b

$\boxed{\forall a, b \in \mathbb{N}}$

Una potenza è un'operazione costituita da due numeri naturali, uno più basso, che prende il nome di base (a), e uno più in alto che prende il nome di esponente (b).

Effettuare questo calcolo vuol dire ripetere (moltiplicando la base per sé stessa) tante volte la base (a) quante volte mi dice l'esponente (b).

Dunque la potenza è una ripetizione dell'operazione di moltiplicazione

$$a^b = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \ldots \cdot a}_{b \text{ VOLTE}}$$

ES.

$$3^4 = \underbrace{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}_{4 \text{ VOLTE}} = 81$$

La potenza in N, conserva le stesse proprietà di addizione e moltiplicazione, purché base (a) ed esponente (b) siano numeri naturali.
La potenza inoltre ha anche sue specifiche proprietà

PROPRIETA' DELLE POTENZE IN N

1) $\forall a \in \mathbb{N} \Rightarrow a^0 = 1 \quad (a \neq 0)$ $\quad \boxed{2^0 = 1}$ $\quad \boxed{0^0}$ FORMA INDETERMINATA

2) $\forall a \in \mathbb{N}, \forall b, c \in \mathbb{N} \Rightarrow a^b \cdot a^c = a^{b+c}$

$a^b = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{b \text{ VOLTE}} \qquad a^c = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{c \text{ VOLTE}}$

ES. $2^3 \cdot 2^2 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$
$= 2^5$
$= 2^{3+2}$

$a^b \cdot a^c = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{b \text{ VOLTE}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{c \text{ VOLTE}} \Rightarrow b + c$ VOLTE

3) $\forall a \in \mathbb{N}, \forall b, c \in \mathbb{N} \Rightarrow a^b : a^c = a^{b-c}$ se $\boxed{b > c}$

$$\frac{a^b}{a^c} = \frac{\underbrace{\cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \ldots \cdot \cancel{a} \cdot \ldots \cdot a}_{b \text{ VOLTE}}}{\underbrace{\cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \ldots \cdot \cancel{a}}_{c \text{ VOLTE}}} = a^{b-c}$$

ES. $2^5 : 2^2 = \dfrac{\cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}{\cancel{2} \cdot \cancel{2}} = 2^3 = 2^{5-2}$

4) $\forall a \in \mathbb{N}, \forall b, c \in \mathbb{N} \Longrightarrow (a^b)^c = a^{b \cdot c}$

$$(a^b)^c = \underbrace{(\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{b \text{ VOLTE}})(\underbrace{a \cdot a \cdots a}_{b \text{ VOLTE}}) \ldots (\underbrace{a \cdot a \cdots a}_{b \text{ VOLTE}})}_{c \text{ VOLTE}}$$

$b \cdot c$ VOLTE

ES $\quad (2^3)^4 = (2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2) = 2^{12} = 2^{3 \cdot 4}$

5) $\forall\, a, b \in \mathbb{N}\ ;\ \forall\, c \in \mathbb{N} \Longrightarrow \boxed{a^c \cdot b^c = (a \cdot b)^c}$

$$a^c \cdot b^c = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{c \text{ VOLTE}} \cdot \underbrace{b \cdot b \cdot \ldots \cdot b}_{c \text{ VOLTE}}$$

$$= \underbrace{(a \cdot b)(a \cdot b) \ldots (a \cdot b)}_{c \text{ VOLTE}} = (a \cdot b)^c$$

ES. $2^3 \cdot 3^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = (2 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 3) = (2 \cdot 3)^3 = 6^3 = 216$

$8 \cdot 27 = 216$

6) $\forall a, b \in \mathbb{N}, \forall c \in \mathbb{N} \Rightarrow a^c : b^c = (a : b)^c$

$$\frac{a^c}{b^c} = \frac{\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{c \text{ VOLTE}}}{\underbrace{b \cdot b \cdot \ldots \cdot b}_{c \text{ VOLTE}}} = \underbrace{\left(\frac{a}{b}\right) \cdot \left(\frac{a}{b}\right) \cdot \ldots \cdot \left(\frac{a}{b}\right)}_{c \text{ VOLTE}}$$

$$= \left(\frac{a}{b}\right)^c$$

ES. $4^2 : 2^2 = (4 : 2)^2 = 2^2 = \underline{4}$

$16 : 4 = \underline{4}$

NOTAZIONE POSIZIONALE DECIMALE

Ci serve per poter scomporre un numero decimale in:
unità, decine, centinaia, migliaia....

$$\boxed{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}$$

Cifre fondamentali del sistema decimale

$$\boxed{n = c_k c_{k-1} \dots c_2 \, c_1 \, c_0}$$

CENTINAIA DECINE UNITÀ

$k \in \mathbb{N}$

$$\boxed{n = c_k \cdot 10^k + c_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \dots c_2 \cdot 10^2 + c_1 \cdot 10^1 + c_0 \cdot 10^0}$$

Scomposizione di un numero naturale attraverso la somma dei prodotti fra le cifre nella loro posizione specifica e la corrispondente potenza di 10

ES $1234 =$

$$= 1 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0 = \boxed{1000 + 200 + 30 + 4}$$

DIVISIBILITA'

La divisibilità è un criterio che deve essere verificato fra due numeri naturali
e deve portarmi ad avere come risultato della divisione fra i due numeri naturali
un numero che a sua volta è naturale.

Numeri primi

Un numero si dice primo quando è divisibile per 1 e
per
sé stesso

$$P = \{1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, \ldots\}$$

I numeri primi sono fondamentali perché qualunque numero naturale
può essere scomposto nel prodotto di questi numeri.

Multipli

m multiplo di un numero a se:

$$\boxed{\forall a, b \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N} \Longrightarrow a \cdot b = m}$$

$$\underline{2} \cdot 3 = \underline{6} \Longrightarrow 6 \text{ È MULTIPLO DI } 2$$

<u>ES</u>

$M_2 = \{2, 4, 6, 8, \ldots\ldots\}$ L'insieme dei multipli di un qualunque numero è sempre un insieme infinito.

Divisori

$$\boxed{\forall a, b \in \mathbb{N}, \exists q \in \mathbb{N} \Rightarrow a : b = q}$$

$$\Downarrow$$

Se questa affermazione risulta vera allora potremo affermare che b è divisore di a

ES. $8 : \underline{2} = 4 \Rightarrow 2$ È DIVISORE DI 8

$D_8 = \{1, 2, 4, 8\}$ L'insieme dei divisori di un qualunque numero è un insieme finito

TEOREMA FONDAMENTALE DELL'ARITMETICA

Ogni numero naturale, tranne 0, può essere scritto come prodotti di numeri primi, ciascuno dei quali elevato a una determinato esponente naturale.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \Rightarrow n = 2^{a} \cdot 3^{b} \cdot 5^{c} \cdot 7^{d} \cdot 11^{e} \cdot \ldots \quad \forall\, a, b, c, d, e \in \mathbb{N}}$$

Ogni numero naturale ha la sua scomposizione, ovvero la scomposizione è UNICA!!!

DIM SUPPONIAMO PER ASSURDO $\exists\ p_{max}$

$$\boxed{\bar{n} = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot \ldots \cdot p_{MAX}}$$

Numero primo più grande di tutti gli altri

$$n = \bar{n} + 1 = \underbrace{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot \ldots\ p_{max}} + 1$$

1) se n FOSSE UN NUMERO PRIMO $\boxed{n > p_{max}}$
ASSURDO

2) se n NON FOSSE PRIMO

Dovrebbe risultare divisibile per un numero primo che risulti più piccolo di pmax (p_i)

$p_i < p_{max}$

$$n = (\bar{n}+1) : p_i = \underbrace{(\bar{n} : p_i)}_{\text{DIVISIONE CON RESTO } 0} + \underbrace{1 : p_i}_{\text{DIVISIONE CON RESTO } 1}$$

n non è divisibile per pi,....in conclusione pmax non esiste, cioè significa che l'insieme dei numeri primi è infinito.