LEZIONE 11

Scomposizione di un numero naturale

La scomposizione di un numero naturale avviene dividendo successivamente il numero naturale per tutti i suoi divisori PRIMI, a partire dal più piccolo fino al più grande, finché il risultato della divisione finale non venga 1

ES

$$\begin{array}{r|l} 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$$\boxed{24 = 2^3 \cdot 3}$$

CRITERI DI DIVISIBILITA'

Criterio di divisibilità per 2

L'unica condizione richiesta ad un numero naturale per essere divisibile per 2 è essere pari. Nel caso di un numero a più cifre finire con una cifra pari.

ES. 31$\underline{6}$ ✓ SI

ES. 31$\underline{5}$ ✗ NO

Criterio di divisibilità per 3

La condizione richiesta ad un numero naturale per essere divisibile per 3 è che la somma delle cifre del numero deve essere un multiplo di 3.

ES $345 \Rightarrow 3+4+5=12$ ✓ SI

ES $346 \Rightarrow 3+4+6=13$ ✗ NO

Criterio di divisibilità per 5

La condizione affinché un numero naturale sia divisibile per 5 è che il numero, a una o più cifre, abbia come ultima cifra o lo 0 o il 5

ES. 34<u>5</u> ✓ ; 34<u>0</u> ✓ SI

ES. 34<u>6</u> ✗ NO

Criterio di divisibilità per 7

Affinché un numero naturale sia divisibile per 7 la differenza fra tutto il numero, privato dell'ultima cifra, meno il doppio dell'ultima cifra risulti un multiplo di 7, ma anche 0.

ES. $287 \Rightarrow 28 - 2 \cdot (7) = 28 - 14 = 14$ ✓

ES. $4578 \Rightarrow 457 - 2 \cdot 8 = 457 - 16 = 441 \Rightarrow 44 - 2 \cdot 1 = 42$ ✓

ES. $376 \Rightarrow 37 - 2 \cdot (6) = 37 - 12 = 25$ ✗

Criterio di divisibilità per 11

Un numero risulta divisibile per 11 se la differenza fra la somma delle cifre di posto dispari meno quelle di posto pari risulta 0 o un multiplo di 11.

5 E 4 SONO DI POSTO PARI

3 E 6 SONO DI POSTO DISPARI

ES. 3465

10^3 10^2 10^1 10^0

$(3+6)-(5+4)=9-9=0$ ✓

ES 2798

$(2+9)-(7+8)=11-15=-4 \notin \mathbb{N}$ ✗

Criterio di divisibilità per 13

Un numero è divisibile per 13 se la somma fra il numero senza l'ultima cifra e il quadruplo dell'ultima cifra risulta un multiplo di 13.

ES. $845 \Rightarrow 84+4\cdot 5 = 84+20 = 104 \Rightarrow 10+4\cdot(4) = 10+16 = 26$ ✓

$1467 \Rightarrow 146+4\cdot 7 = 146+28 = 174 \Rightarrow 17+4(4) = 17+16 = 33$ ✗

Criterio di divisibilità per 17

Un numero è divisibile per 17 quando la differenza fra tutto il numero privato dell'ultima cifra e il quintuplo dell'ultimo numero risulta 0 o un multiplo di 17

ESEMPIO

$$1071 \Longrightarrow 107 - 5\cdot(1) = 107 - 5 = 102 \Longrightarrow 10 - 5\cdot(2) = 10 - 10 = 0$$

$$1467 \Longrightarrow 146 - 5\cdot(7) = 146 - 35 = 111 \Longrightarrow 11 - 2\cdot 1 = 9$$

Criterio di divisibilità per 19

Un numero risulta divisibile per 19 se la somma fra il numero privato dell'ultima cifra e il doppio dell'ultima cifra risulta un multiplo di 19.

ES. $1216 \longrightarrow 121 + 2 \cdot 6 = 121 + 12 = 133 \longrightarrow 13 + 2 \cdot 3 = 13 + 6 = 19$ ✓

ES. $1467 \longrightarrow 146 + 2 \cdot 7 = 146 + 14 = 160 \longrightarrow 16 + 2 \cdot (0) = 16$ ✗

MASSIM COMUN DIVISORE (M.C.D)

Ricercare il massimo comun divisore (M.C.D) fra due numeri naturali significa cercare il divisore comune a entrambi i due numeri più grande possibile.

$\forall a, b \in \mathbb{N}$

$\boxed{M.C.D(a, b)}$

Come lo trovo a livello pratico?
Il metodo chiave è quello della scomposizione in fattori primi

Esiste però, se i numeri non sono eccessivamente grandi, un metodo più "Insiemistico"

Bisogna scrivere gli insiemi dei divisori di entrambi i numeri e
da lì ricavare il M.C.D.

<u>ES</u>

$M.C.D(24,36)$

$D_{24}=\{1,2,3,4,6,8,\underline{12},24\}$

$D_{36}=\{1,2,3,4,6,9,\underline{12},18,36\}$

$$\boxed{\underline{M.C.D}(24,36)=12}$$

Se utilizzo la scomposizioni in fattori primi di entrambi i numeri,
per ricavare il massimo comun divisore fra i due numeri devo
prendere il prodotto dei fattori comuni, ma ad esponente minore

$$\begin{array}{r|l} 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 36 & 2 \\ 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$$24 = 2^3 \cdot 3 \qquad 36 = 2^2 \cdot 3^2$$

$$M.c.D(24, 36) = 2^2 \cdot 3 = 4 \cdot 3 = \underline{12}$$

Algoritmo di Euclide per il calcolo del M.C.D

Questo algoritmo vale solamente per il calcolo del M.C.D esclusivamente fra due numeri naturali!!!

$$M.C.D(315, 42) = M.C.D(315-42, 42) =$$
$$= M.C.D(273, 42) = M.C.D(273-42, 42) =$$
$$= M.C.D(231, 42) = M.C.D(231-42, 42) =$$
$$= M.C.D(189, 42) = M.C.D(189-42, 42) =$$
$$= M.C.D(147, 42) = M.C.D(147-42, 42) =$$
$$= M.C.D(105, 42) = M.C.D(105-42, 42) =$$
$$= M.C.D(63, 42) = M.C.D(63-42, 42) = M.C.D(21, 42) = \underline{21}$$

L'algoritmo di Euclide è un algoritmo, in cui, iteratamente, si sottrae il numero più piccolo fra i 2 a quello più grande, fin quando il più grande non diventa il più piccolo e da lì poi si deduce il M.C.D

VERIFICHIAMOLO!!!

$$\begin{array}{r|l} 315 & 3 \\ 105 & 3 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 42 & 2 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$$315 = \underline{3}^2 \cdot 5 \cdot \underline{7} \qquad 42 = 2 \cdot \underline{3} \cdot \underline{7}$$

$$M.C.D\,(315, 42) = 3 \cdot 7 = \underline{21}$$

Minimo comune multiplo fra due o più numeri naturali (m.c.m)

Il minimo comune multiplo è il multiplo comune più piccolo fra due o più numeri naturali.

Anche qui il metodo chiave è quello della scomposizione, ma posso operare anche con il metodo di stampo insiemistico.

$m.c.m(24, 36) = 72$

Scrivo per elencazione l'insieme dei multipli dei due o più numeri naturali coinvolti.

Es

$M_{24} = \{24, 48, \underline{72}, 96, 120, 144, \ldots\}$

$M_{36} = \{36, \underline{72}, 108, 144, \ldots\}$

Se procedessimo per scomposizione, in questo caso dovrei prendere il prodotto di fattori comuni e non comuni, ciascuno dei quali elevato all'esponente maggiore.

$$\begin{array}{r|l} 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$$\boxed{24 = 2^3 \cdot 3}$$

$$\begin{array}{r|l} 36 & 2 \\ 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$$\boxed{36 = 2^2 \cdot 3^2}$$

m.c.m (24, 36) =

$= 2^3 \cdot 3^2 = 8 \cdot 9 = \underline{72}$

Legame fra M.C.D e m.c.m

$$\boxed{\forall a, b \in \mathbb{N} \Longrightarrow a \cdot b = M.C.D(a, b) \cdot m.c.m(a, b)}$$

Questo equivale a dire che per qualunque coppia di numeri naturali, il prodotto di questi due numeri è sempre uguale al prodotto fra massimo comun divisore e minimo comune multiplo fra i due numeri stessi.

ES

$$24 \cdot 36 = \underbrace{M.C.D(24, 36)}_{12} \cdot \underbrace{m.c.m(24, 36)}_{72} =$$

$$= 12 \cdot 72$$

$24 \cdot 36 = 12 \cdot 72$

$12 \cdot 2 \cdot 36 = 12 \cdot 72$

$$\begin{array}{r} 24 \cdot \\ 36 \\ \hline 144 \\ 72 \\ \hline 864 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 12 \cdot \\ 72 = \\ \hline 24 \\ 84 \\ \hline 864 \end{array}$$