LEZIONE 19

DIVISIBILITA' IN N

Divisibilità corrisponde a un determinato criterio che deve essere applicato fra due numeri naturali, e deve restituire come risultato (quoziente o quoto nel caso in cui il risultato è un numero intero) un numero naturale.

$$\boxed{P = \{1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}}$$

Numeri primi

I numeri primi sono quei numeri divisibili solo per 1 e per sé stessi.
La loro importanza dipende dal fatto che qualunque numero naturale può essere scomposto nel prodotto di questi numeri.

Multipli

I multipli devono soddisfare questa caratteristica:

$$\forall a, b \in \mathbb{N} \Rightarrow a \cdot b = m \; ; \; \forall m \in \mathbb{N}$$

ES $2 \cdot 3 = 6$ 6 MULTIPLO DI 2

$$\boxed{M_2 = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24 \ldots\}}$$

L'insieme dei multipli è un insieme infinito.

Divisori

Si dice divisore quel numero che soddisfa questa condizione:

$$\boxed{\forall a \in \mathbb{N}, \forall d \in \mathbb{N} \Longrightarrow a : d = n, \; n \in \mathbb{N}}$$

$6 : 2 = 3 \Longrightarrow$ 2 È DIVISORE DI 6

Teorema fondamentale dell'aritmetica

Ogni numero naturale può essere scomposto nel prodotto di una serie di numeri primi, ciascuno dei quali elevati ad un esponente intero positivo (naturale).

$$\boxed{a, b, c, d, e, \ldots \in \mathbb{N}}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \Longrightarrow n = 2^{a} \cdot 3^{b} \cdot 5^{c} \cdot 7^{d} \cdot 11^{e} \cdots$$

I numeri primi sono infiniti, quindi non potrai mai determinare il numero primo più grande di tutti

Ragioniamo per assurdo, quindi assumiamo per assurdo che i numeri primi siano infiniti, quindi di conseguenza dovrebbe esistere un numero primo più grande di tutti gli altri...Pmax

$$\forall \bar{n} \in \mathbb{N} \Longrightarrow \boxed{\bar{n} = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdots P_{MAX}}$$

$\bar{n}$ NON È UN NUMERO PRIMO

$$\boxed{n = \bar{n} + 1 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdots P_{MAX} + 1}$$

$$\boxed{m = \bar{m} + 1 = (2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdots p_{max}) + 1}$$

PRIMO

$m > p_{max}$?!?

ASSURDO

$\Downarrow$

$$\boxed{\nexists\ p_{MAX}}$$

NON È PRIMO

DOVREBBE RISULTARE DIVISIBILE PER $p_i \leq p_{max}$

$$(\bar{m} + 1) : p_i = \underbrace{\bar{m} : p_i}_{\text{DIVISIONE SENZA RESTO}} + \underbrace{1 : p_i}_{\text{DIVISIONE CON RESTO = 1}}$$

ASSURDO

$$\begin{array}{r|l} 1 & 3 \\ 0 & 0 \\ \hline 1 & \end{array}$$

m NON DIVISIBILE PER $p_i \Rightarrow \boxed{\nexists\ p_{max}}$

Scomposizione in fattori primi

Tutti i numeri naturali possono essere scomposti, in modo unico (ogni numero naturale ha la sua scomposizione), nel prodotto di un certo numero di numeri primi.

Come si effettua la scomposizione in fattori primi di un numero naturale?

Si divide il numero naturale in modo successivo e reiterato per tutti i suoi divisori primi possibili, partendo sempre da quello più piccolo. Una volta che ottengo 1 mi fermo.

ES

$$\begin{array}{r|l} 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$$\boxed{24 = 2^3 \cdot 3}$$

CRITERI DI DIVISBILITA'

Per 2

I numeri divisibili per 2 sono solo i numeri pari, o che terminano con una cifra che è un numero pari.

ES. 12, 14, 16, 484

Per 3

I numeri divisibili per 3 sono quei numeri tali che la somma delle cifre deve risultare un multiplo di 3.

ES $24 \Rightarrow 2+4=6$ ✓ $\qquad 23 \Rightarrow 2+3=5$ ✗

Per 5

I numeri divisibili per 5 sono quei numeri che terminano (hanno come ultima cifra) 0 o 5.

ES. 25 ✓ 30 ✓

21 ✗ 31 ✗