

LEZIONE 21

MASSIMO COMUN DIVISORE

Il massimo comun divisore fra due o più numeri naturali è il divisore comune più grande fra i due o più numeri naturali

Come lo calcolo?

Metodo insiemistico

Scrivo per elencazione gli insiemi di tutti i divisori dei numeri coinvolti e cerco l'elemento comune più grande fra tutti.

BUONO SE I NUMERI NON SONO TROPPO GRANDI

Metodo della scomposizione in fattori primi.

Il massimo comun divisore fra due o più numeri naturali si trova attraverso il prodotto dei fattori primi comuni, ottenuti dalla scomposizione dei numeri naturali in questione, prendendo quelli comuni ad esponente più piccolo.

BUONO ED EFFICACE SEMPRE!!!

Esempio col metodo insiemistico

$$\text{M.C.D}(48, 54, 63) = \underline{3}$$

$$D_{48} = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48\}$$

$$D_{54} = \{1, 2, 3, 6, 9, 18, 27, 54\}$$

$$D_{63} = \{1, 3, 7, 9, 21, 63\}$$

Esempio col metodo della scomposizione in fattori primi.

$$\begin{array}{r|l} 48 & 2 \\ 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$$48 = 2^4 \cdot 3$$

$$\begin{array}{r|l} 54 & 2 \\ 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$$54 = 2 \cdot 3^3$$

$$\begin{array}{r|l} 63 & 3 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$$63 = 3^2 \cdot 7$$

$$\text{M.C.D.}(48, 54, 63) = 3$$

Algoritmo di Euclide per il calcolo del M.C.D

L'algoritmo di Euclide è un algoritmo che mi permette di calcolare il massimo comun divisore (M.C.D) esclusivamente solo fra due numeri naturali, ed è basato su una regola iterativa:

- sottrarre successivamente al numero più grande il numero più piccolo
- non appena quello più piccolo diviene maggiore di quello più grande, allora si sottrae al più grande quello che rimane.

$$\begin{aligned} \text{ES } \text{M.C.D}(125, 50) &= \text{M.C.D}(125 - 50, 50) = \\ &= \text{M.C.D}(75, 50) = \text{M.C.D}(75 - 50, 50) = \\ &= \text{M.C.D}(25, 50) = \text{M.C.D}(25, 50 - 2 \cdot 25) = \text{M.C.D}(25, 0) = 25!! \end{aligned}$$

VERIFICHIAMO

$$\begin{array}{r|l} 125 & 5 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 5 & \\ \hline 125 = \underline{5^3} \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 50 & 2 \cdot 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \\ \hline 50 = 2 \cdot \underline{5^2} \end{array}$$

$$\text{M.C.D.}(125, 50) = \underline{5^2 = 25!!!}$$

Minimo comune multiplo fra due o più numeri naturali

Il minimo comune multiplo fra due o più numeri naturali corrisponde al multiplo più piccolo in comune fra i due o più numeri naturali.

Come si calcola?!?!?

Metodo insiemistico

Scrivo per elencazione gli insiemi dei multipli dei numeri coinvolti e cerco l'elemento in comune più piccolo fra tutti i numeri coinvolti.

Metodo della scomposizione in fattori primi

Considero il prodotto dei fattori primi comuni e non comuni ad esponente maggiore, ottenuti dalle scomposizioni in fattori primi dei numeri coinvolti.

Metodo insiemistico

$$\begin{aligned} M_{48} &= \{48, 96, 144, 192, 240, 288, 336, 384, 432, \dots\} \\ M_{54} &= \{54, 108, 162, 216, 270, 324, 378, 432, 486, 540, \dots\} \\ M_{63} &= \{63, 126, 189, 252, 315, 378, 441, 504, 567, 630, \dots\} \end{aligned}$$

SI PUÒ VERIFICARE CHE

$$\text{m.c.m.}(48, 54, 63) = 3024$$

Metodo Scompositivo

$$\begin{array}{r} 48 \\ \hline 2 \quad 2 \\ 2 \quad 2 \\ 2 \quad 2 \\ 3 \end{array}$$

$$48 = 2^4 \cdot 3$$

$$\begin{array}{r} 54 \\ \hline 2 \\ 3 \quad 3 \\ 3 \quad 3 \\ 3 \end{array}$$

$$54 = 2 \cdot 3^3$$

$$\begin{array}{r} 63 \\ \hline 3 \\ 3 \quad 7 \\ 7 \\ 1 \end{array}$$

$$63 = 3^2 \cdot 7$$

$$\text{m.c.m.}(48, 54, 63) = 3^3 \cdot 2^4 \cdot 7 = 27 \cdot 16 \cdot 7 = 3024 \dots$$

Legame fra M.C.D e m.c.m fra due numeri naturali

Il prodotto di due qualunque numeri naturali è sempre uguale al prodotto fra il loro massimo comun divisore e il loro minimo comune multiplo

$$\forall a, b \in \mathbb{N} \Rightarrow a \cdot b = \text{M.C.D}(a, b) \cdot \text{m.c.m}(a, b)$$

ES

$$\begin{array}{r|l} 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \quad 24 = \underline{2^3} \cdot \underline{3}$$

$$\text{M.C.D}(24, 36) = 2^2 \cdot 3 = 4 \cdot 3 = \underline{12}$$

$$\text{m.c.m}(24, 36) = 2^3 \cdot 3^2 = 8 \cdot 9 = \underline{72}$$

$$\begin{array}{r|l} 36 & 2 \\ 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \quad 36 = \underline{2^2} \cdot \underline{3^2}$$

$$24 \cdot 36 = 12 \cdot 72$$

$$\underline{2} \cdot \underline{12} \cdot \underline{36} = 12 \cdot 72$$

✓
sì!!!