

LEZIONE 9

LIMITE DESTRO E SINISTRO

Limite destro

$$\forall \varepsilon > 0 \exists I_d(x_0) : \forall x \in I_d(x_0) \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

Preso un qualunque arbitrario epsilon piccolo a piacere deve esistere un intorno destro del punto x_0 tale che per ogni numero appartenente a questo intorno deve succedere che la funzione disti dal suo valore limite della suddetta quantità epsilon.

$$\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = l$$

Limite sinistro

$$\forall \varepsilon > 0 \exists I_\varepsilon(x_0) : \forall x \in I_\varepsilon(x_0) \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

Preso un qualunque arbitrario epsilon piccolo a piacere deve esistere un intorno destro del punto x_0 tale che per ogni numero appartenente a questo intorno deve succedere che la funzione disti dal suo valore limite della suddetta quantità epsilon.

$$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = l$$

ESEMPIO

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = 0$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists I_d(0) : \forall x \in I_d(0) \Rightarrow |\sqrt{x} - 0| < \varepsilon$$

$$|\sqrt{x}| < \varepsilon \Rightarrow -\varepsilon < \sqrt{x} < \varepsilon$$

$$\begin{cases} \sqrt{x} > -\varepsilon & A \\ \sqrt{x} < \varepsilon & B \end{cases}$$

$$\sqrt{x} > -\varepsilon \quad \sqrt{f(x)} > g(x)$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ -\varepsilon < 0 \end{cases} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} x \geq 0 \\ x \leq 0 \end{cases}$$

$$\sqrt{-\varepsilon} < \sqrt{x} < \sqrt{\varepsilon}$$

(B) $\sqrt{f(x)} < g(x)$

$\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) < [g(x)]^2 \end{cases}$

$\begin{cases} x \geq 0 \\ \varepsilon > 0 \forall x \in \mathbb{R} \\ x < \varepsilon^2 \end{cases}$

$b < x < c^2$

(A) $x \geq 0$

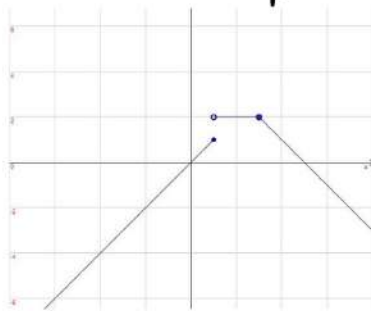
(B) $0 < x < \varepsilon^2$

$[d(a) -] 0, \varepsilon^2 [$

$\checkmark$

ESEMPIO

$$f(x) = \begin{cases} x & x \leq 1 \\ 2 & 1 < x \leq 3 \\ 5-x & x > 3 \end{cases}$$



$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} 2 = 2$$

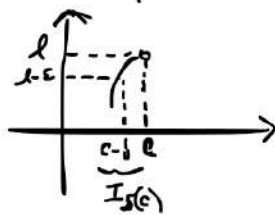
$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} 2 = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} 5-x = 5-3 = 2$$

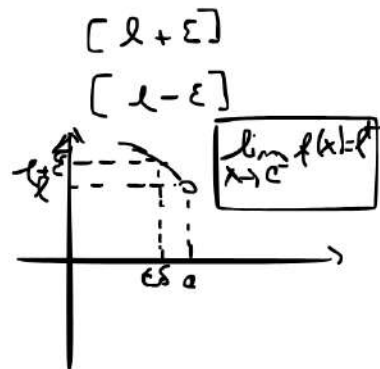
Limite per difetto o per eccesso

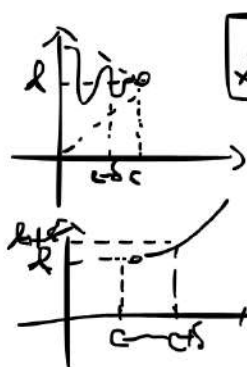
$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = l^+ \quad \text{ECCCESSO}$$

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = l^- \quad \text{DIFETTO}$$



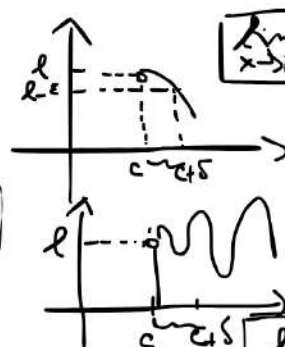
$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = l^-$$





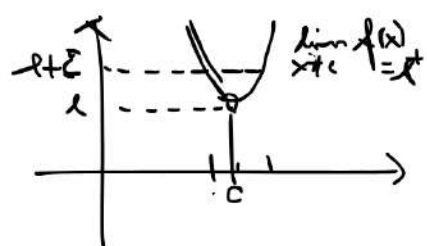
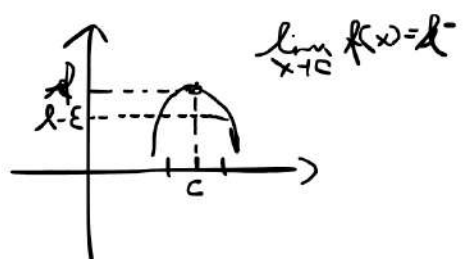
$$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = l$$

$$\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = l^+$$



$$\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = l$$

$$\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = l$$



ESERCIZIO

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 + 2 = 2^+$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists I(0) : \forall x \in I(0) \Rightarrow$$

$$l \leq f(x) < l + \varepsilon$$

$$2 \leq x^2 + 2 < 2 + \varepsilon$$

$$2 - \varepsilon < x^2 < 2 + \varepsilon$$

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} \\ -\sqrt{\varepsilon} < x < \sqrt{\varepsilon} \end{cases}$$

$$\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array}$$

$$0 < x^2 < \varepsilon$$

$$\begin{cases} x^2 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ x^2 < \varepsilon \quad x = \pm\sqrt{\varepsilon} \\ -\sqrt{\varepsilon} < x < \sqrt{\varepsilon} \end{cases}$$

$$I(0) =]-\sqrt{\varepsilon}; \sqrt{\varepsilon}[$$

Limite per x che tende all'infinito, di una funzione che tende ad un valore finito.

$$y = f(x) = \frac{x-1}{x}$$

$$\text{Dom } f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

x	$y = f(x)$
-10.000	1,0001
-1000	1,001
-100	1,01
-10	1,1
10	0,9
100	0,99
1000	0,999
10.000	0,9999

Tutte le volte che la x tende ad un valore infinitamente grande o infinitamente piccolo la funzione $f(x)$ si avvicina ad un valore limite finito (in questo caso il valore 1).

$$\begin{array}{c}
 \boxed{|f(x) - l| < \varepsilon} \\
 \downarrow \\
 \boxed{\left| \frac{x-1}{x} - 1 \right| < \varepsilon} \Rightarrow \boxed{\left| \frac{x-1-x}{x} \right| < \varepsilon} \\
 \downarrow \\
 \boxed{\left| -\frac{1}{x} \right| < \varepsilon} \Rightarrow \boxed{\left| \frac{1}{x} \right| < \varepsilon} \Rightarrow \boxed{|x| > \frac{1}{\varepsilon}} \\
 \downarrow \\
 \boxed{x < -\frac{1}{\varepsilon} \vee x > \frac{1}{\varepsilon}}
 \end{array}$$

$\varepsilon > 0$

$- \varepsilon < \frac{1}{x} < \varepsilon$

$\frac{1}{2} < 3$
 $2 > \frac{1}{3}$

$k \in \mathbb{R}^+$

$|f(x)| > k$
 $f(x) < -k \vee f(x) > k$

PASSAGGIO ALLO INVERSO

$$\begin{aligned}
 & x < -\frac{1}{\varepsilon} \vee x > \frac{1}{\varepsilon} \\
 & \underbrace{\quad}_{I(-\infty)} \quad \underbrace{\quad}_{I(+\infty)} = I(\infty) \\
 & \Downarrow \quad \quad \quad \Downarrow \\
 &]-\infty, -\frac{1}{\varepsilon}[\cup]\frac{1}{\varepsilon}, +\infty[= I(\infty)
 \end{aligned}$$

$\sim \boxed{\varepsilon = 0,1}$
 $x < -10 \vee x > 10$

La definizione per questa seconda tipologia cambia dunque in questo modo

$$\forall \varepsilon > 0 \exists I(\infty) : \forall x \in I(\infty) \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

Preso epsilon arbitrariamente piccolo a piacere deve esistere un intorno di infinito tale che per ogni x appartenente a questo intorno la distanza fra la funzione e il suo valore limite deve essere infinitesima, dell'ordine di questo epsilon.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = l$$