

LEZIONE 9  
Insiemi numerici



Insieme Naturali

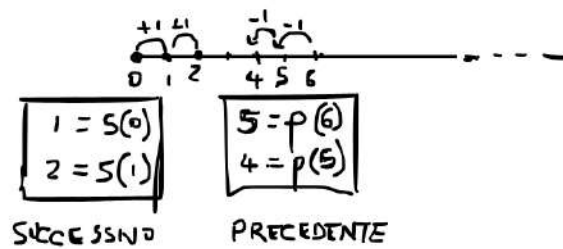
ASSIOMI DI PEANO

- Il più piccolo numero naturale è 0
- ogni numero naturale ha un suo successore
- ogni numero naturale (tranne 0) ha un precedente
- tutto l'insieme dei numeri naturali si ottiene, reiterando l'operazione di successivo di un numero

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

INSIEME INFINITO

I numeri naturali si rappresentano su una semiretta, perché l'insieme è ovviamente infinito, però si conosce l'elemento più piccolo secondo gli assiomi di Peano. Quindi significa che posso rappresentare questo insieme numerico su una semiretta, cioè una linea che ha inizio ma non ha fine.



# Operazioni in N

## Addizione

$$3 + 2 = 5$$

1)

Posso effettuare questa operazione attraverso gli assiomi di Peano?

3+2 equivale a ripetere l'operazione di successivo due volte

$$\underbrace{s(s(3))}_{= s(4)} = 5$$

3

$$4 + 4$$

$$\begin{aligned} & s(s(s(s(4)))) = \\ & = s(s(s(s(5)))) = s(s(6)) = \\ & = s(7) = 8 \end{aligned}$$

2) Questa operazione crea problemi in  $\mathbb{N}$ ? **No !!!**

Creare problemi significa che il risultato dell'addizione (SOMMA) non appartenga all'insieme dei numeri naturali.

$$\forall m_1, m_2 \in \mathbb{N} \Rightarrow m_1 + m_2 = s, s \in \mathbb{N}$$

Qualunque coppia di numeri naturali si scelgano in  $\mathbb{N}$ , la somma dei due è sempre e comunque un numero naturale, quindi continua ad appartenere all'insieme  $\mathbb{N}$

$$\begin{array}{ccc} m_1 + m_2 = & s & \\ \underbrace{\quad\quad\quad} & \underbrace{\quad} & \\ \downarrow & \downarrow & \\ \text{ADDENDI} & \text{SOMMA} & \end{array}$$

#### Proprietà dell'addizione in $\mathbb{N}$

##### Proprietà commutativa

Scambiando l'ordine degli addendi non cambia la somma

$$\boxed{\forall m_1, m_2 \in \mathbb{N} \Rightarrow m_1 + m_2 = m_2 + m_1}$$

ES.  
 $2 + 3 = 3 + 2 = 5$

##### Proprietà associativa

Sommando la somma dei primi due addendi ad un terzo o viceversa, sommando il primo addendo alla somma del secondo con il terzo, la somma finale non cambia

$$\boxed{\forall m_1, m_2, m_3 \in \mathbb{N} \Rightarrow (m_1 + m_2) + m_3 = m_1 + (m_2 + m_3)}$$

ES.

$$\begin{array}{c} (2+3)+4 = 2+(3+4) \\ \downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow \\ 5+4 = 2+7 \\ \swarrow \quad \searrow \quad \swarrow \quad \searrow \\ 9 = 9 \end{array}$$

#### Esistenza dell'elemento neutro

Qualunque numero naturale sommo a 0, riottengo il numero naturale di partenza.

$$\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow n + 0 = n \quad \text{es. } 2 + 0 = 2$$

0 rappresenta l'elemento neutro dell'addizione in  $\mathbb{N}$

$$(\mathbb{N}, +)$$

L'addizione nell'insieme dei numeri naturali gode quindi di tre proprietà:

- commutativa
- associativa
- esistenza dell'elemento neutro

Se in un certo insieme una determinata operazione gode delle tre proprietà sopraelencate, allora l'insieme con la suddetta operazione costituisce una nuova struttura algebrica denominata "GRUPPO ABELIANO"

CULTURA  
PERSONALE

Sottrazione

Posso effettuare questa operazione con gli assiomi di Peano? SI

$$8 - 5 = 3$$

Sottrarre a 8 il numero 5 equivale, partendo da 8, ad effettuare l'operazione di precedente 5 volte:

$$p(p(p(p(p(8)))))) = p(p(p(p(p(7)))))) = p(p(p(p(p(6)))))) = p(p(p(p(p(5)))))) = p(p(p(p(p(4)))))) = 3$$

L'operazione di sottrazione crea problemi in  $\mathbb{N}$ ?

SI

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Es.} & 3 & - & 8 & = & -5 \\ & \in \mathbb{N} & & \in \mathbb{N} & & \notin \mathbb{N} \\ & \text{MINUENDO} & & \text{SOTTRAENDO} & & \end{array}$$

La sottrazione non soddisfa due delle tre proprietà che soddisfa l'addizione:

- commutativa (ma comunque soddisfa la anticommutativa)
- associativa

Es.

$$8 - 5 = 3 \quad 5 - 8 = -3$$

Scambiando l'ordine di sottraendo e minuendo il risultato (DIFFERENZA) cambia.

\*

Proprietà anticommutativa

$$\forall m_1, m_2 \in \mathbb{N} \Rightarrow m_1 - m_2 = -(m_2 - m_1)$$

la sottrazione non soddisfa la proprietà associativa

Es.

$$\begin{array}{l} (8-3)-2 \stackrel{?!?}{=} 8-(3-2) \\ \downarrow \quad \downarrow \\ 5-2 \quad 8-1 \end{array} \Rightarrow 3 \neq 7$$

$$3 - 0 = 3$$

L'esistenza dell'elemento neutro invece funziona.

### Moltiplicazione

La moltiplicazione può essere effettuata con gli assiomi di Peano, ma non in modo diretto come abbiamo fatto con addizione e sottrazione

La moltiplicazione è una ripetizione dell'operazione di addizione di un numero con sé stesso.

ES

$$2 \cdot 3 = 2 + 2 + 2 = 6$$

3 VOLTE      $S(S(0))$

Il primo termine della moltiplicazione si definisce moltiplicando, mentre il secondo termine si definisce moltiplicatore.  
Il moltiplicatore mi dice quante volte devo effettuare l'operazione composta di successivo di 0.

|                      |               |
|----------------------|---------------|
| 1 <sup>a</sup> VOLTA | $S(S(0)) = 2$ |
| 2 <sup>a</sup> VOLTA | $S(S(2)) = 4$ |
| 3 <sup>a</sup> VOLTA | $S(S(4)) = 6$ |

Il risultato della moltiplicazione si chiama **PRODOTTO**  
N.B. Moltiplicando e moltiplicatore possono essere definiti anche **FATTORI Moltiplicativi**.

La moltiplicazione crea problemi? **NO**

$$\forall m_1, m_2 \in \mathbb{N} \Rightarrow m_1 \cdot m_2 = P, P \in \mathbb{N}$$

$$\begin{matrix} 2 \cdot 3 & = & 6 \\ \in \mathbb{N} & \in \mathbb{N} & \in \mathbb{N} \end{matrix}$$

Proprietà della moltiplicazione

Proprietà commutativa

Scambiando l'ordine dei fattori moltiplicativi il prodotto non cambia

$$\text{Es } 2 \cdot 3 = 3 \cdot 2 = 6$$

$$\forall m_1, m_2 \in \mathbb{N} \Rightarrow m_1 \cdot m_2 = m_2 \cdot m_1$$

Proprietà associativa

Associando fra di loro due termini (FATTORI MOLTIPLICATIVI) su tre in modo arbitrario (come cavolo voglio io!!!),  
il risultato (PRODOTTO) non cambia

Es

$$\forall m_1, m_2, m_3 \in \mathbb{N} \Rightarrow (m_1 \cdot m_2) \cdot m_3 = m_1 \cdot (m_2 \cdot m_3)$$

$$\begin{matrix} (2 \cdot 3) \cdot 4 & = & 2 \cdot (3 \cdot 4) \\ \underline{6 \cdot 4} & = & \underline{2 \cdot 12} = 24 \end{matrix}$$

Esistenza dell'elemento neutro

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow n \cdot 1 = n}$$

ES.  $3 \cdot 1 = 3$

Annullamento del prodotto

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow n \cdot 0 = 0}$$

ES.  $3 \cdot 0 = 0$

In definitiva la moltiplicazione nell'insieme  $\mathbb{N}$  soddisfa:

- proprietà commutativa
- proprietà associativa
- esistenza dell'elemento neutro
- annullamento del prodotto o esistenza dell'elemento annullante

$$\boxed{(\mathbb{N}, \cdot)}$$

GRUPPO ABELIANO