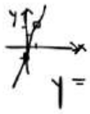
LEZIONE 12

Introduzione al concetto di limite



$\boxed{y = 2x-1}$

x	y
0	-1
1	2

$$y = f(x) = \frac{2x^2 - x - 1}{x-1} = \frac{\cancel{(x-1)}(2x+1)}{\cancel{(x-1)}}$$

$$\boxed{f(x) = 2x+1}$$

$\mathrm{Dom} f: \; x-1 \neq 0$

$x \neq 1$

$\mathbb{R} \setminus \{1\}$

$2x^2 - x - 1$

$\Delta = (-1)^2 - 4(2)(-1) = 1 + 8 = 9$

$x_{1,2} = \frac{1 \pm 3}{4}$; $x_1 = 1$; $x_2 = -\frac{1}{2}$

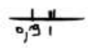
$x - 1 = 0$ $\quad$ $2x+1 = 0$

$x = 1$ $\quad$ $x = -\frac{1}{2}$

x	$y = f(x)$
0,9	2,8
0,99	2,98
0,999	2,998

$\to 1$ $\quad$ $\to 3$

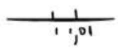
DALLA SINISTRA



x	$y = f(x)$
1,1	3,2
1,01	3,02
1,001	3,002

$1 \leftarrow$ $\quad$ $\to 3$

DALLA DESTRA



Quando x tende al valore 1, sia dai valori poco più piccoli di 1 che dai valori poco più grandi di 1, la funzione tende al valore 3.

$$\boxed{\lim_{x \to 1} \underbrace{\frac{2x^2 - x - 1}{x - 1}}_{f(x)} = \underbrace{3}_{\ell}}$$

DISTANZA

$|x_2 - x_1|$

Questo mi sta anche dicendo che la distanza fra la funzione f(x) e il valore 3 risulterà essere molto piccola, proprio come conseguenza a quello che abbiamo detto prima.

$$|f(x) - \ell| < [0,1] ; [0,01] ; [0,001]$$

Quantità infinitesime

$\boxed{\varepsilon}$

$$\boxed{\left| \frac{2x^2 - x - 1}{x - 1} - 3 \right| < \varepsilon}$$

Operazione di verifica del valore del limite

$$\left|\frac{2x^2-x-1}{x-1}-3\right|<\varepsilon$$

$$\boxed{\begin{array}{c}|f(x)|<K\\ -K<f(x)<K\end{array}}\quad K\in\mathbb{R}^+$$

$$|2x+1-3|<\varepsilon$$

$$|2x-2|<\varepsilon$$

$$-\varepsilon<2x-2<\varepsilon$$

→ CATENA DI DISUGUAGLIANZE

(STESSI PRINCIPI DI EQUAZ. E DI DISEQ.)

$$2 \quad -\varepsilon<2x-\cancel{2}\cancel{+2}<\varepsilon+2$$

$$2-\varepsilon<2x<2+\varepsilon$$

$$\frac{2-\varepsilon}{2}<\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}}<\frac{2+\varepsilon}{2}$$

$$\frac{\cancel{2}}{\cancel{2}}-\frac{\varepsilon}{2}<x<\frac{\cancel{2}}{\cancel{2}}+\frac{\varepsilon}{2}$$

$$\boxed{1-\frac{\varepsilon}{2}<x<1+\frac{\varepsilon}{2}}$$

$$\left]1-\frac{\varepsilon}{2};\ 1+\frac{\varepsilon}{2}\right[$$

$I(1)$ INTORNO DI X-1

Questo mi fa capire che il limite di una funzione esiste ed ha un determinato se ritrovo un intorno del punto a cui la x tende (in questo caso 1).

Limite per x che tende ad un valore finito c con la funzione che tende ad un valore l

$c, \ell \in \mathbb{R}$

$$\boxed{\lim_{x \to c} f(x) = \ell}$$

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \; \exists I(c) : \forall x \in I(c) \Longrightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon}$$

Per ogni numero infinitesimo arbitrariamente piccolo, ma maggiore di zero deve esistere un intorno del punto c (valore a cui la x tende) tale che per ogni punto x appartenente all'intorno del punto c segue che, la distanza fra il valore della funzione e il valore limite risulta più piccolo dell'infinitesimo epsilon prima citato.

PROVARE ATTRAVERSO LA DEFINIZIONE

$$\boxed{\lim_{x \to 2} 4 - x^2 = 0}$$

$c = 2$

$f(x) = 4 - x^2$

$l = 0$

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \ \exists I(2) : \forall x \in I(2) \Longrightarrow |4 - x^2 - 0| < \varepsilon}$$

$$\boxed{|4 - x^2| < \varepsilon}$$

DEVO TROVARE UN INTORNO DI 2

$|\underbrace{4-x^2}| < \varepsilon$

$|f(x)| < \varepsilon$

$-\varepsilon < f(x) < \varepsilon$

$\boxed{-\varepsilon < 4-x^2 < \varepsilon}$

$\boxed{\text{VALGONO CONTEMPORANEAM}}$

$\begin{cases} 4-x^2 > -\varepsilon \\ 4-x^2 < \varepsilon \end{cases}$

$\begin{cases} x^2-4 < \varepsilon \\ x^2-4 > -\varepsilon \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x^2 < 4+\varepsilon \\ x^2 > 4-\varepsilon \end{cases}$

$\begin{cases} x^2 < 4+\varepsilon \\ x^2 > 4-\varepsilon \end{cases}$; $x = \pm\sqrt{4+\varepsilon} \Longrightarrow -\sqrt{4+\varepsilon} < x < \sqrt{4+\varepsilon}$

; $x = \pm\sqrt{4-\varepsilon} \Longrightarrow x < -\sqrt{4-\varepsilon} \vee x > \sqrt{4-\varepsilon}$

$$\begin{cases} -\sqrt{4+\varepsilon} < x < \sqrt{4+\varepsilon} \\ x < -\sqrt{4-\varepsilon} \ \vee \ x > \sqrt{4-\varepsilon} \end{cases}$$

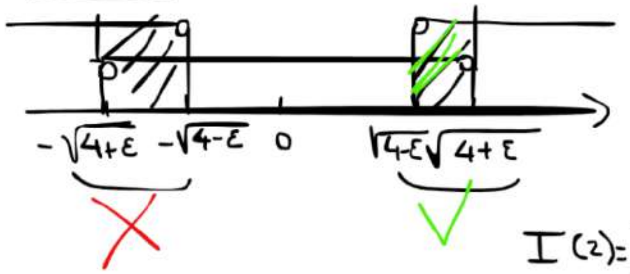
per esempio $\varepsilon = 0,1$

$\simeq -2,024$

$2,024 \simeq$

$\simeq -1,974$

$\simeq 1,974$



$I(2) = \left]\sqrt{4-\varepsilon}; 4+\varepsilon\right[$

$\varepsilon = 0,1 \quad \simeq \left]1,974; 2,024\right[$

Limite destro e sinistro

$$\lim_{x \to c^+} f(x) = l$$

LIMITE DESTRO

$c \Leftarrow$

DEVO TROVARE UN INTORNO DESTRO

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists I_d(c) : \forall x \in I_d(c) \Longrightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = l$$

LIMITE SINIS[redacted]

DEVO TROVARE UN INTORNO SINISTRO

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists I_s(c) : \forall x \in I_s(c) \Longrightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

$$\boxed{\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} = 0}$$ ✓

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists I_\delta(0) : \forall x \in I_\delta(0) \Longrightarrow |\sqrt{x} - 0| < \varepsilon$$

$$|\sqrt{x}| < \varepsilon \qquad \cancel{-\varepsilon <} \sqrt{x} < \varepsilon \qquad x \to 0^+$$

$$\sqrt{x} < \varepsilon \qquad \sqrt{f(x)} < g(x)$$

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 & x \geq 0 \\ g(x) > 0 & \varepsilon > 0 \end{cases}$$ ✓

$$\sqrt{x} < \varepsilon \Longrightarrow x < \varepsilon^2$$

$$\boxed{0 < x\ \varepsilon^2} \qquad x \quad I_\delta(0) =]0; \varepsilon^2[$$