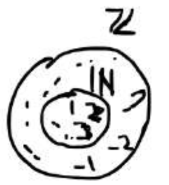
LEZIONE 12

L'insieme dei numeri interi relativi

Il problema generato dalla sottrazione, visto nelle lezioni precedenti,
mi obbliga a estendere l'insieme che avevo prima, quindi creare un nuovo
insieme più grande del precedente che chiaramente contiene il precedente.

$$\boxed{\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}}$$

L'insieme dei numeri naturali, risulterà a questo punto,
un sottoinsieme dell'insieme dei numeri interi relativi (Z).



$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$$

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

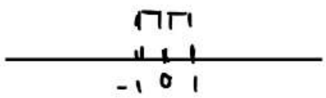
$$\boxed{\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}}$$

Insieme dei numeri negativi

Proprietà nell'insieme Z

Esistenza dell'opposto

L'opposto di un numero intero non è altro che quel numero che ha la stessa distanza
di un altro numero o alla destra o alla sinistra dello zero.
In sostanza non è altro che il numero di partenza con il segno cambiato.



Esempio: l'opposto di 1 risulta essere -1.

La somma di 2 numeri opposto darà sempre zero come risultato.

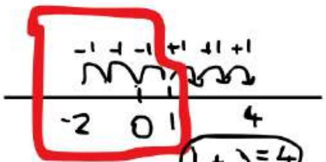
$$\underset{z}{1} + (\underset{p}{-1}) = 0$$

$$\boxed{\forall z,p \in \mathbb{Z} \Rightarrow z+p=0}$$

Proprietà degli opposti

Esempi di operazioni in Z

Addizione



$1 + 3 = 4$

$1 + (-3) = -2$

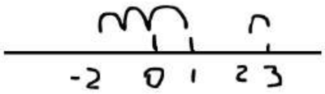
1^a $\quad 1 - 3 = -2$

$$\boxed{\forall a, b \in \mathbb{Z} \Rightarrow a - b = a + (-b)}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{1 - 3 = 1 + (-3)}$$

Questo equivale a dire che sommare due numeri interi, di cui il primo è positivo e il secondo è negativo equivale a sottrarre i due numeri.



$$\forall a, b \in \mathbb{Z} \Rightarrow a - b = -(b - a)$$

Sottrarre due numeri interi equivale a sottrarli scambiando i due numeri, ma inserendo un segno meno davanti, cioè effettuando l'opposto del risultato.

$$\boxed{1 - 3 = -(3 - 1)}$$

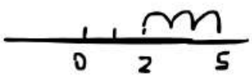
Deriva dalla proprietà anticommutativa della sottrazione

$$1 - 3 = -2$$
$$3 - 1 = 2$$

Ora la questione sottrazione - addizione risulta essere banale. Possiamo inglobare queste due operazione in un'unica operazione che definirò SOMMA ALGEBRICA

$$\boxed{2 + (-3) = 2 - 3}$$

$$\boxed{2 - (-3) = 2 + 3}$$



Moltiplicazione

L'unica cosa che cambia rispetto a N, è la moltiplicazione dei segni.

Regole moltiplicative per i segni.

$+ \cdot + = - \cdot - = +$

$+ \cdot - = - \cdot + = -$

Segni concordi

$(-a) \cdot (-b) = ab$

$a \cdot b = ab$

Segni discordi

$(-a) \cdot b = -ab$

$a \cdot (-b) = -ab$

Divisione

La divisione in Z si comporta esattamente come quella in N, con la differenza che (esattamente come nella moltiplicazione in Z) bisogna dividere i segni.

$+ \cdot + = + : + = +$ $\quad$ $- \cdot - = - : - = +$

$+ \cdot - = + : - = -$ $\quad$ $- \cdot + = - : + = -$

ES. $\quad 6 : (-3) = -2 \qquad (-8) : (-2) = +4 = 4$

Potenze in Z

La definizione di base è praticamente identica a quella dei numeri naturali

$$\boxed{z^n}$$

z BASE

$\boxed{z \in \mathbb{Z}}$

n ESPONENTE

$\boxed{n \in \mathbb{N}}$

$\boxed{\text{BASE POSITIVA} \quad z > 0}$

ES. $2^3 = 8$

Nessun problema!!!

$\boxed{\text{BASE NEGATIVA} \quad z < 0}$

$(-2)^3 = -8$

$(-2)^4 = +16$

Se l'esponente non fosse positivo usciremmo fuori anche da Z!!!

$2^{-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^1 \qquad \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$

Con la base negativa, se l'esponente è dispari, allora il risultato della potenza è negativo, mentre se l'esponente è pari, allora il risultato della potenza è positivo.

Le proprietà delle potenze, viste in N, continuano a valere identiche non solo in Z, ma negli altri due insiemi Q ed R.

Valore assoluto

$$\boxed{|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}}$$

$x \in \mathbb{Z}$

$|2| = 2$

$|-2| = 2$

Restituisce il numero privo di segno, anche se in realtà è come lo restituisse positivo.

- $|a| \geq 0 \quad \forall a \in \mathbb{Z}$
- $|a| + |b| \geq |a+b| \quad \forall a, b \in \mathbb{Z}$
- $|a| \cdot |b| = |a \cdot b| \quad \forall a, b \in \mathbb{Z}$
- $|a^2| = |a|^2 = a^2 \quad \forall a \in \mathbb{Z}$

$|-1| + |-2| \geq |-1 + (-2)|$

$1 + 2 \geq |-3|$

$1 + 2 \geq 3 \Rightarrow 3 \geq 3$!!!

$$\left[3^3 \cdot 2^6 \cdot (2^2)^3\right] : \left[6^3 \cdot (2^2)^4\right] + \left[(42^3 : 6^3) : 7^2 \cdot \left[(3^2 : 3^2)^5\right]^3 + (4^3 - 4) : 2 : 5 =\right.$$

$$= \left[3^3 \cdot 2^6 \cdot 2^6\right] : \left[6^3 \cdot 2^8\right] + \left[7^3 : 7^2\right] : 1 + 60 : 2 : 5 =$$

$$= \underbrace{\left[3^3 \cdot 2^{12}\right] : \left[6^3 \cdot 2^8\right]} + 7 : 1 + 6 =$$

$$= \frac{3^3 \cdot \cancel{2^{12}}\, 2^4}{6^3 \cdot \cancel{2^8}} + 7 + 6 =$$

$$= \frac{1 \cdot \cancel{2^4}\, 2^1}{\cancel{2^3}} + 7 + 6 = 2 + 7 + 6 = \underline{15}$$