# Lezione 13
## L'insieme dei numeri razionali

$$\begin{array}{r|l} 5 & 3 \\ \underline{3} & 1 \\ 2 & \end{array}$$

$$\underset{\in \mathbb{N}}{5} : \underset{\in \mathbb{N}}{3} = \underbrace{1 \ r \ 2}_{\notin \mathbb{N}}$$

$$\underset{\in \mathbb{Z}}{(-5)} : \underset{\in \mathbb{Z}}{(-3)} = \underbrace{1 \ r \ 2}_{\notin \mathbb{Z}}$$

L'insieme dei numeri razionali nasce dall'esigenza di dovere effettuare sempre e comunque la divisione fra due numeri interi, non avendo come risultato (quoziente) necessariamente un numero intero.

$$\underbrace{5}_{\text{DIVIDENDO}} : \underbrace{3}_{\text{DIVISORE}} = \frac{5}{3} \longrightarrow \text{FORMA FRAZIONARIA (FRAZIONE)}$$

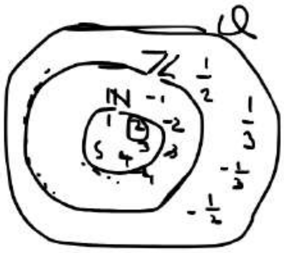
$$\boxed{\frac{5}{3} = 1{,}6666\ldots = 1{,}\overline{6}} \longrightarrow \text{RAPPR. DECIMALE}$$

$$\begin{array}{r|l} 5 & 3 \\ \underline{3} & 1{,}66 \\ 20 & \\ \underline{18} & \\ 2\ 20 & \end{array}$$

$$\boxed{\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}}$$

$\frac{2}{1} = 2 \rightarrow$ FRAZ. APPARENTI

$-\frac{2}{1}$




$$\underbrace{\frac{1}{2}}_{\text{RAPPR FRAZION}} = \underbrace{0,5}_{\text{RAPPR DECIMALE}}$$

## FRAZIONI → CON RAPP. FRAZIONARIA

$$\mathbb{Q} = \left\{ p = \frac{a}{b} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0 \right\}$$

$a$ NUMERATORE

$b$ DENOMINATORE

**Proprietà invariantiva**

Moltiplicando o dividendo il numeratore e il denominatore di una frazione per lo stesso numero intero, la frazione non varia (non cambia).

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{a \cdot K}{b \cdot K} \qquad K \in \mathbb{Z},\ K \neq 0}$$

ES $\boxed{\frac{2}{3}} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 5} = \boxed{\frac{10}{15}}$ $\quad K = 5,\ a = 2,\ b = 3$ $\quad \boxed{\frac{4}{6}} = \frac{4 : 2}{6 : 2} = \boxed{\frac{2}{3}}$

FRAZIONI EQUIVALENTE

**Dalla proprietà invariantiva deriva la prima operazione che può essere effettuata con le frazioni, ovvero la semplificazione.**

**Semplificazione fra frazioni**

Equivale a ridurre la frazione a un numeratore e un denominatore non più divisibile per uno stesso intero e in questo caso si dice che la frazione è ridotta ai minimi termini.

**Per semplificare vuol dire che devo effettuare una o più divisioni successive di numeratore e denominatore.**
**Per poter effettuare la semplificazione nel minore tempo possibile serve dunque ricercare fra numeratore e denominatore il massimo comun divisore (M.C.D).**

$$\begin{array}{r|l} 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 36 & 2 \\ 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$$\boxed{24 = 2^3 \cdot 3} \qquad \boxed{36 = 2^2 \cdot 3^2}$$

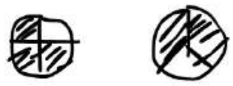
ES $\frac{24}{36} = \frac{24 : 12}{36 : 12} = \frac{2}{3}$

$\frac{\cancel{24}}{\cancel{36}} = \frac{2}{3}$

$M.C.D\,(24, 36) = 3 \cdot 2^2 = 3 \cdot 4 = 12$

**CONFRONTO FRA FRAZIONI**

$$\boxed{\frac{2}{3} < \frac{3}{4}} \quad ?!?$$



$\frac{3}{4}$ $\frac{2}{3}$

**Come faccio a stabilirlo, senza usare calcolatrice o effettuando la divisione in colonna?!?!**
**Devo fare in modo che entrambe le frazioni abbiano lo stesso denominatore** !!!

$$\boxed{\frac{3}{4}} \cdot \frac{3}{3} = \frac{9}{12}$$

$$\boxed{\frac{2}{3}} \cdot \frac{4}{4} = \frac{8}{12}$$

PROPR. INVARIANT

PROPR. INVARIANT

$$\frac{8}{12} < \frac{9}{12} \Longrightarrow \frac{2}{3} < \frac{3}{4}$$

Somma algebrica con le frazioni.

$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = ???$

$a, b, c, d \in \mathbb{Z}$
$b, d \neq 0$

Caso 1: Le frazioni hanno lo stesso denominatore.

ES. $\frac{1}{2} + \frac{5}{2} = \frac{1+5}{2} = \frac{\cancel{6}^{3}}{\cancel{2}_{1}} = \frac{3}{1} = 3$

Si sommano solamente i numeratori lasciando il denominatore comune.

Caso 2: le frazioni non hanno lo stesso denominatore

Confronto fra le due o più frazioni e ottenimento di un denominatore comune per tutti e tre.

Trovare immediatamente un denominatore comune senza il confronto e questo attraverso la ricerca del minimo comune multiplo (m.c.m)

Utilizzare la formula immediata

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd} \qquad \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{bd}$$

ES

$$\frac{2}{3} + \frac{3}{4}$$

$$\boxed{\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}}$$

$$\frac{2}{3} + \frac{3}{4} = \frac{2 \cdot 4 + 3 \cdot 3}{3 \cdot 4} = \frac{8+9}{12} = \frac{17}{12}$$

$m.c.m\,(3, 4) = 12$

$$\frac{2}{3} + \frac{3}{4} = \frac{8 + 9}{12} = \frac{17}{12}$$

$3$

$$\begin{array}{r|l} 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array}$$

$4 = 2^2$

$m.c.m(3, 4) = 2^3 \cdot 3 = 12$

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{4} + \frac{3}{4}\cdot\frac{3}{3}$$

$$\frac{8}{12} + \frac{9}{12} = \frac{17}{12}$$

$$\frac{2}{3} - \frac{3}{4}$$

$$\frac{8}{12} - \frac{9}{12} = \frac{8-9}{12} = -\frac{1}{12}$$

Moltiplicazione

$a, b, c, d \in \mathbb{Z}$

$b, d \neq 0$

$$\boxed{\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}}$$

La moltiplicazione si effettua moltiplicando i numeratori e i denominatori delle frazioni fra di loro.

ES.

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{2 \cdot 3}{3 \cdot 4} = \frac{\cancel{6}}{\cancel{12}} = \frac{1}{2}$$

SENZA SEMPLIFICAZ. A CROCE

$$\frac{\cancel{2}^{1}}{\cancel{3}_{1}} \cdot \frac{\cancel{3}^{1}}{\cancel{4}_{2}} = \frac{1 \cdot 1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{2}$$

CON LA SEMPLIFICAZ A CROCE

**Divisione**

**Reciproco o inverso di un numero nella rappresentazione frazionaria**

Effettuare il reciproco o inverso di un numero intero o frazionario significa scambiare fra di loro numeratore e denominatore.

$$\frac{a}{b} \xrightarrow{r} \frac{b}{a} \qquad \text{es. } \frac{2}{3} \xrightarrow{r} \frac{3}{2}$$

$b \neq 0 \qquad a \neq 0$

**Il prodotto fra un numero e il suo reciproco è sempre 1** $\Longrightarrow \frac{\cancel{2}^{1}}{\cancel{3}_{1}} \cdot \frac{\cancel{3}^{1}}{\cancel{2}_{1}} = \frac{1 \cdot 1}{1 \cdot 1} = \frac{1}{}$

**Dividere due frazioni significa moltiplicare la prima frazione per il reciproco della seconda frazione.**

$$\boxed{\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}}$$

<u>ES</u>

$$\boxed{\frac{2}{3} : \frac{3}{4} = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 3} = \frac{8}{9}}$$

**Potenze**

Valgono le stesse identiche proprietà già viste in precedenza nell'insieme N e nell'insieme Z

OVVIA

$$\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^{z} = \frac{a^{z}}{b^{z}}}$$

**Adesso però risolvere il problema lasciato in sospeso in Z, cioè il problema dell'esponente negativo!!!**

$$\boxed{z \in \mathbb{Z}}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} a, b \in \mathbb{Z} \\ b \neq 0 \end{array}}$$

$$\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \left(\frac{b}{a}\right) = \frac{b}{a}}$$

**L'esponente negativo inverte la base, cioè effettua il reciproco della base, scambiando numeratore e denominatore fra di loro, ritornando ad essere un esponente positivo.**

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-2} = \left(\frac{b}{a}\right)^{2} = \frac{b^2}{a^2}$$

ES. $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{2}\right)^{2} = \frac{3^2}{2^2} = \frac{9}{4}$

$$\left[\frac{5}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\right]^{-1} : \left(-\frac{1}{1}+\frac{4}{5}\right)^{-1} + \left(-\frac{1}{5}\right)^{2} - \left(-\frac{5}{2}\right)^{-2} - \left[\left(-\frac{5}{2}\right)^{-1}+\frac{1}{5}\right]^{2} =$$

$$= \left[-\frac{5}{4}\right]^{-1} : \left(\frac{-5+4}{5}\right)^{-1} + \frac{1}{25} - \left(-\frac{2}{5}\right)^{2} - \left[\left(-\frac{2}{5}\right)+\frac{1}{5}\right]^{2} =$$

$$= -\frac{4}{5} : \left(-\frac{1}{5}\right)^{-1} + \frac{1}{25} - \frac{4}{25} - \left[\frac{-2+1}{5}\right]^{2} =$$

$$= -\frac{4}{5} : \left(-\frac{5}{1}\right) + \frac{1}{25} - \frac{4}{25} - \left[-\frac{1}{5}\right]^{2} =$$

$$= -\frac{4}{5} \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) + \frac{1}{25} - \frac{4}{25} - \frac{1}{25} =$$

$$= \cancel{\frac{4}{25}} + \cancel{\frac{1}{25}} - \cancel{\frac{4}{25}} - \cancel{\frac{1}{25}} = \boxed{0}$$

$$\left(\frac{10}{9}-\frac{5}{6}\right)^2 : \left(-\frac{5}{6}\right)^2 + \left(\frac{1}{5}-\frac{17}{25}\right)^2 \cdot \left(\frac{9}{4}-\frac{8}{3}\right)^3 + \frac{7}{20} =$$

$$= \left(\frac{20-15}{18}\right)^2 : \frac{25}{36} + \left(\frac{5-17}{25}\right)^2 \cdot \left(\frac{27-32}{12}\right)^3 + \frac{7}{20} =$$

$$= \left(\frac{5}{18}\right)^2 : \frac{25}{36} + \left(-\frac{12}{25}\right)^2 \cdot \left(-\frac{5}{12}\right)^3 + \frac{7}{20} = \qquad 25 = 5^2$$

$$= \frac{\cancel{5^2}}{\cancel{18^2}\,9} \cdot \frac{\cancel{18 \cdot 2}}{\cancel{25}} + \frac{\cancel{12^2}}{\cancel{25^2}\,5} \cdot \left[-\frac{\cancel{5^3}}{\cancel{12^3}\,12}\right] + \frac{7}{20} \qquad \frac{\cancel{18}}{7} \qquad 25^2 = 5^4$$

$$\frac{1}{9} - \frac{1}{60} + \frac{7}{20} = \frac{20-3+63}{180} = \frac{80}{180} = \frac{\cancel{8}\,4}{\cancel{18}\,9} \quad \boxed{\frac{4}{9}}$$