

Lezione 14

FUNZIONI CONTINUE E COLLEGAMENTO CON IL CALCOLO DEI LIMITI

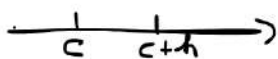
Una funzione $y = f(x)$ si dice continua in un punto $x = c$ se esiste il limite finito per x che tende a c della funzione $f(x)$ e questo deve essere uguale alla funzione calcolata per $x=c$.

$$\boxed{\exists \lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)}$$
$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \exists I(c): \forall x \in I(c) \Rightarrow |f(x) - f(c)| < \varepsilon}$$

Le condizioni base sono 3:

- esiste $f(c)$;
- esistere finito il limite per x che tende a c ;
- il valore del limite deve essere uguale a $f(c)$.

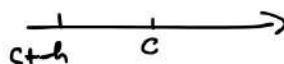
$$x = c + h$$



$$h > 0$$

$$\boxed{h \rightarrow 0 \iff x \rightarrow c} \implies$$

$$h \in \mathbb{R} \\ \text{INCREMENTO}$$



$$h < 0$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c) \\ \lim_{h \rightarrow 0} f(c+h) = f(c) \end{array}}$$

ATTRAVERSO
IL PUNTO
 $x \rightarrow c$

ATTRAVERSO
L'INCREMENTO
 $h \rightarrow 0$

Continuità dalla destra e dalla sinistra

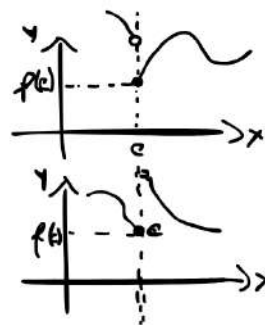
Una funzione si dice continua dalla destra se esiste questo limite:

$$\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = f(c)$$

Una funzione si dice continua dalla sinistra se esiste questo limite:

$$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = f(c)$$

$$\forall x \in I(c) \exists \lim_{h \rightarrow 0} f(x+h) = f(x), \forall h \in \mathbb{R}$$



Continuità nell'intervallo I

ES. $f(x) = 4 - x^2$

1) $f(2) = 4 - 2^2 = 4 - 4 = 0$

$\exists f(2) = 0$

2) $\exists \lim_{x \rightarrow 2} (4 - x^2) = \lim_{x \rightarrow 2} 4 - \lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4 - 4 = 0$ ✓

3) $f(2) = \lim_{x \rightarrow 2} 4 - x^2$ ✓

STUDIARE
LA CONTINUITÀ DI $f(x)$
IN $x=2$

$f(x) = 4 - x^2$
È CONTINUA IN $x=2$

ES. 2

$$y = f(x) = \frac{2x^2 - x - 1}{x - 1}$$

Dom $f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$
 VOGLIO STUDIARE
 IN $x=1$

1) $\nexists f(1)$

$$= \frac{(x-1)(2x+1)}{(x-1)}$$

solo
 $x \neq 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - x - 1}{x - 1} = \left[\frac{0}{0} \right]$$

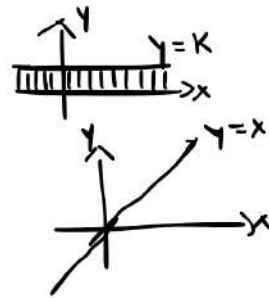
$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(2x+1)}{(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} 2x+1 = 2 \cdot 1 + 1 = 3$$

$$\begin{aligned} P &= -2 \\ S &= -1 \\ 1 \cdot (-2) \\ 2x^2 + x - 2x - 1 &= \\ &= x(2x+1) - 1(2x+1) \end{aligned}$$

IL LIMITE ESISTE MA NON IL VALORE DELLA FUNZIONE
 NEL PUNTO

Esempi di continuità delle funzioni elementari

$$\begin{aligned}
 1) \quad & y = f(x) = K \\
 & x=c \quad f(c) = K \quad \lim_{x \rightarrow c} f(x) = K \\
 & \text{CONTINUA SENZA DUBBIO!!!} \\
 2) \quad & y = f(x) = x \\
 & x=c \quad f(c) = c \quad \lim_{x \rightarrow c} f(x) = c \\
 & \text{CONTINUA SENZA DUBBIO}
 \end{aligned}$$



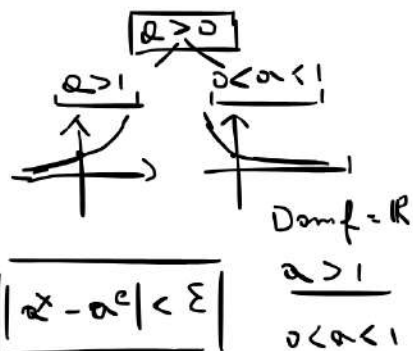
39 $y = a^x$

$x=c$ $\lim_{x \rightarrow c} a^x = a^c$

$f(c) = a^c$

CONTINUA

$\forall \varepsilon > 0 \exists I(c) : \forall x \in I(c) \Rightarrow |a^x - a^c| < \varepsilon$



Caso $a > 1$

$$|e^x - a^c| < \varepsilon \Rightarrow -\varepsilon < e^x - a^c < \varepsilon$$

$$a^c - \varepsilon < e^x < a^c + \varepsilon$$

$$a^c - \varepsilon < e^x < a^c + \varepsilon$$

PASSO TAVOLO A LOGARITMO

$$\log_a(a^c - \varepsilon) < \log_a e^x < \log_a(a^c + \varepsilon)$$

$$\log_a(a^c - \varepsilon) < x < \log_a(a^c + \varepsilon)$$

$$\log_a(a^c - \varepsilon) < \log_a a^c$$

$$\log_a(a^c + \varepsilon) > \log_a a^c$$

$I(c)$

$$\begin{cases} x < \log_a(a^c + \varepsilon) \\ x > \log_a(a^c - \varepsilon) \end{cases}$$

$I(c)$

DIMOSTRATA LA CONTINUITÀ DELLA FUNZIONE ESPONENZIALE

$0 < a < 1$ DIMOSTRA TI

Continuità delle funzioni inverse

IP $y = f(x)$ CONTINUA IN $\text{Dom } f$
INVERTIBILE



TS $x = g(y) = f^{-1}(y)$ CONTINUA in $\text{Cod } f = \text{Dom } f^{-1}$

ES $\lim_{x \rightarrow 1} (\underbrace{\arcsin x}_{\sin^{-1} x} + \underbrace{\arctg x}_{\text{tg}^{-1} x}) = \arcsin 1 + \arctg 1 =$
 $= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{2\pi + \pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$

Limiti delle funzioni composte

Ip $y = f(z)$ $z = g(x)$ FUNZIONI
 $\underbrace{\quad}_{\text{DOMINIO } f}$ $\underbrace{\quad}_{\text{DOMINIO DI } g}$ $z = g(x) \in D$

$$y = f(g(x))$$

$f(z)$ CONTINUA
 PER $z = m$

$\lim_{x \rightarrow c} g(x) = m$

TS $\lim_{x \rightarrow c} f(g(x)) = f(m)$

Dim per ipotesi f è continua in m $y = f(z)$

$$\exists \lim_{z \rightarrow m} f(z) = f(m)$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists I(m): \forall x \in I(m) \Rightarrow |f(z) - f(m)| < \varepsilon$$

$$\underline{I(m) = (m - \delta_1, m + \delta_2)}$$

$$\underline{\delta_1, \delta_2 \in \mathbb{R}^+}$$

$$z \in (m - \delta_1, m + \delta_2)$$

$$\boxed{\delta = \min(\delta_1, \delta_2)}$$

MINORE FRA I DUE
NUMERI REALI

$$\underline{I'(m) = (m - \delta, m + \delta)} \Rightarrow I'(m) \subset I(m)$$

$$I'(m) \subset I(m)$$

$$z \in I(m) \longrightarrow \underline{z \in I'(m)}$$

$$p \in \mathbb{R} \quad \text{potremmo} \quad \lim_{x \rightarrow p} g(x) = m \quad \Rightarrow \quad |g(x) - m| < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists I(p) : \forall x \in I(p) \quad \text{Arbitr.} \quad \delta \text{ di } p \text{ e } m$$

$$x \in I(p) \wedge x \neq p \longrightarrow |g(x) - m| < \delta$$

$$z = g(x) \quad |z - m| < \delta \quad \Rightarrow \quad \underline{z = g(x) \in I'_m}$$

$$x \in I_c \wedge x \neq c \Rightarrow z = g(x) \in I'_m \Rightarrow |f(z) - f(c)| < \epsilon$$

$$\exists \lim_{x \rightarrow c} f(g(x)) = f(c)$$

CONTINUA SE IL LIMITE ESISTE
FINITO E' UN QUANTO NEL PUNTO

$$\lim_{x \rightarrow c} f(g(x)) = f(g(c))$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \log(x+1)$$

$$\lim_{x \rightarrow c} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \rightarrow c} g(x)\right)$$

$$\log\left[\lim_{x \rightarrow c} (x+1)\right]$$

$$\text{ES} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \underbrace{e^{\frac{x+1}{x-1}}}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{x+1}{x-1}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{x-1}} = e$$

$$z = g(x) = \frac{x+1}{x-1}$$

$$f(z) = e^z$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x(1 + \frac{1}{x})}{x(1 - \frac{1}{x})} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x}} = 1$$

$$= \underline{e^1}$$

$$\begin{aligned}
 & \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log^2 x + 1}{\log x + 2 \log^2 x} = \\
 & = \lim_{z \rightarrow -\infty} \frac{z^2 + 1}{z + 2z^2} = \\
 & = \lim_{z \rightarrow -\infty} \frac{z^2(1 + \frac{1}{z^2})}{z^2(1 + 2z)} = \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

