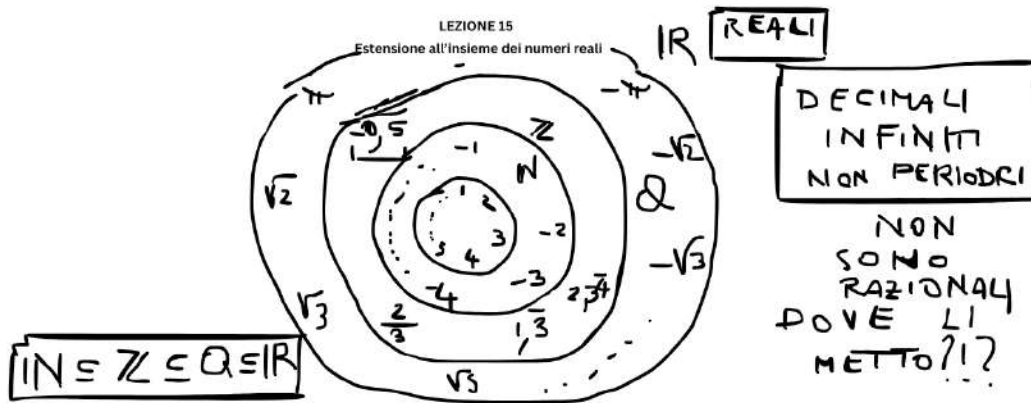
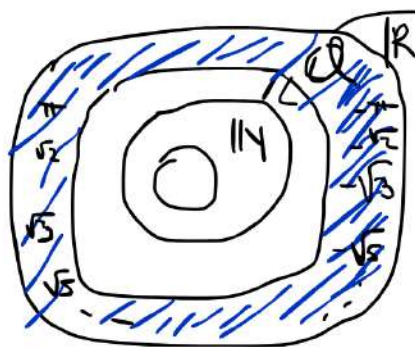


LEZIONE 15

Estensione all'insieme dei numeri reali





$$\boxed{\mathbb{R} - \mathbb{Q}}$$

IRRAZIONALI

In questo insieme stanno tutti quei numeri che non si possono rappresentare attraverso una frazione.

Perché sono stati introdotti questi numeri?

$\sqrt{2}$ $\sqrt{3}$ $d = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ $\frac{4}{6} \cdot \frac{K^2}{3} = \frac{2}{3}$
FRAZIONE RIDOTTA A TERMINI MINIMI (SEMPLIFICAZIONE) FRAZIONE RIDOTTA A TERMINI MINIMI (SEMPLIFICAZIONE)

PER ASSURDO SUPPONIAMO CHE $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$

$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ → FRAZIONE RIDOTTA A TERMINI MINIMI (SEMPLIFICAZIONE)
 $p, q \in \mathbb{Z}$ $q \neq 0$

ELEVIAMO TUTTO AL QUADRATO

$(\sqrt{2})^2 = \left(\frac{p}{q}\right)^2 \Rightarrow 2 = \frac{p^2}{q^2}$

MOLTIPLICHO PER q^2 A DESTRA E A SINISTRA

$2 \cdot q^2 = \frac{p^2}{\cancel{q^2}} \Rightarrow 2q^2 = p^2$

$p^2 = 2q^2$

Qualunque numero moltiplicato per 2 è sempre un numero pari

p^2 NUMERO PARI $\Rightarrow p$ NUMERO PARI

$p = 2K$ $K \in \mathbb{Z}$

$p^2 = 2q^2 \Rightarrow (2K)^2 = 2q^2$
 $2K^2 = 2q^2 \Rightarrow 2K^2 = 2q^2$
 $K^2 = q^2$

$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ → PARI
 $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ → PARI
 q^2 NUMERO PARI $\Rightarrow q$ NUMERO PARI
 ASSURDO!!!
 NON È RIDOTTA AI TERMINI MINIMI

$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ c.v.d

Quindi numeri non si possono scrivere sotto forma di frazione

$\sqrt{2}, \sqrt{3}, \dots$ RADICALI

RADICALI

$(R-Q)$

Definizione

$$\sqrt[m]{a}$$

$$K \in \mathbb{Q}$$

$$\textcircled{K} \cdot \sqrt[m]{a} \quad \text{ES} \quad \boxed{\begin{matrix} 3 \\ 2 \cdot \sqrt{4} \end{matrix}}$$

m INDICE $m \in \mathbb{N}$
 a RADICANDO $a \in \mathbb{Q}$
 $\sqrt{\quad}$ RADICE
 K COEFFICIENTE
 DEL RADICALE

Il radicale esiste sempre?!?!

$$\sqrt[n]{a} = \begin{cases} b \\ b \geq 0 \end{cases}$$

$$2^2 = 4 \quad \boxed{\sqrt[2]{4} = 2}$$

n DISPARI

n PAR

$$\forall a \in \mathbb{Q}$$

$$a \geq 0$$

$b^n = a$	$\sqrt[n]{a} = b$
$2^3 = 8$	$\sqrt[3]{8} = 2$
$(-2)^3 = -8$	$\sqrt[3]{-8} = -2$

Esiste un unico valore della radice quadrata, o quarta o sesta, quindi di tutte le radici di indice pari, e questo risultato deve essere sempre quello positivo.

Condizioni di esistenza del radicale

$$\begin{array}{l} \sqrt[n]{a} \\ \sqrt[n]{a} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{C.E.} \\ a \geq 0 \\ \text{NESSUNA} \\ \text{CONDIZIONE} \end{array} \quad \begin{array}{l} n \text{ PARI} \\ \hline n \text{ DISPARI} \end{array}$$

$$\text{ES. 1} \quad \sqrt[4]{x-2} \\ \boxed{x-2 \geq 0} \Rightarrow \boxed{x \geq 2} \quad \text{C.E.}$$

$$n = 4 \\ \alpha = x - 2$$

$$\text{ES. 2} \quad \sqrt[3]{x-2} \quad \boxed{\forall x \in \mathbb{R}} \\ \text{SEMPRE VERIFICATO!!!}$$

$$n = 3 \\ \alpha = x - 2$$

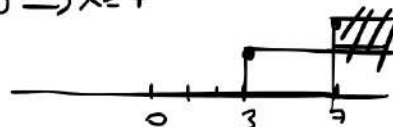
16

ES. 3

$$\sqrt[6]{x-3} - 5x \cdot \sqrt[4]{x-7}$$

$$\begin{cases} x-3 \geq 0 \Rightarrow x \geq 3 \\ x-7 \geq 0 \Rightarrow x \geq 7 \end{cases}$$

SISTEMA DI
DISUGUAGLIAMENTI



$$x \geq 7$$

Questo ha soluzioni quando le due linee (relative alle due soluzioni delle due disequazioni) si sovrappongono

in $x=7 \Rightarrow \sqrt[6]{7-3} - 5 \cdot 7 \cdot \sqrt[4]{7-7}$
 $= \sqrt[6]{4}$ ✓

in $x=6 \Rightarrow \sqrt[6]{6-3} - 5 \cdot 6 \cdot \sqrt[4]{6-7}$
 $= \sqrt[6]{3} - 30 \sqrt[4]{-1}$ ✗

$$\sqrt[4]{-1} = ?!?!?$$

Prima proprietà fondamentale

$$(\sqrt[n]{a})^n = \begin{cases} \underline{a} \geq 0 & \text{se } n \text{ PAR} & \text{es } ({}^2\sqrt{2})^2 \\ \underline{a} & \text{se } n \text{ DISPARI} & \text{es } ({}^3\sqrt{3})^3 \end{cases}$$

$$1) \quad ({}^3\sqrt{-5})^3 = -5 \quad ; \quad ({}^3\sqrt{5})^3 = 5 \quad ({}^4\sqrt{5})^4 = 5$$

$$\frac{({}^4\sqrt{-5})^4}{\text{NO!}} \quad ({}^4\sqrt{a-5})^4 = a-5 \quad \begin{matrix} \text{c. f.} \\ a-5 \geq 0 \\ \boxed{a \geq 5} \end{matrix}$$

Seconda proprietà fondamentale

$$\sqrt[n]{a} = \begin{cases} |a| & n \in \mathbb{N} \text{ PARI} \\ a & n \in \mathbb{N} \text{ DISPARI} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} |-2| &= 2 \\ |2| &= 2 \end{aligned}$$

ES. $\sqrt[3]{a^3} = a$

$$\sqrt[3]{5^3} = 5$$

$$\sqrt[4]{a^4} = |a| = \begin{cases} +a & a \geq 0 \\ -a & a < 0 \end{cases}$$

$$\sqrt[4]{4^4} = |4| = \begin{cases} 4 & 4 \geq 0 \\ -4 & 4 < 0 \end{cases} \text{ No!}$$