Lezione 17

Limiti notevoli

$$\lim_{x\to 1} \frac{e^{f(x)}-1}{f(x)} = 1$$

314

$$\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{e^x - e} \quad \left[\frac{0}{0}\right]$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{e(e^{x-1}-1)} = \frac{1}{e} \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)}{e^{(x-1)}-1} = \frac{1}{e}\cdot 1 = \boxed{\frac{1}{e}}$$

315

$$\lim_{x\to -2} \frac{e^{(x+2)}-1}{(x+2)} \quad \left[\frac{0}{0}\right] = 1$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{(1+5x^2)^{\frac{3}{x^2}}}{5x+3} = \qquad \boxed{\lim_{x \to 0^+} (1+f(x))^{\frac{1}{f(x)}}}$$

$$= \frac{\lim_{x \to 0^+} (1+5x^2)^{\frac{3}{x^2}}}{\lim_{x \to 0^+} 5x+3} = \frac{1}{3} \lim_{x \to 0^+} (1+5x^2)^{\frac{3}{x^2}}$$

$$= \frac{1}{3} \lim_{x \to 0^+} \left(1 + 5x^2\right)^{\frac{3}{x^2}} =$$

$$\frac{3}{x^2} = \frac{1}{\frac{x^2}{3} \cdot \frac{5}{5}}$$

$$= \frac{1}{3} \lim_{x \to 0^+} \left[\left(1 + 5x^2\right)^{\frac{1}{5x^2}}\right]^{15} = \frac{1}{3} e^{15}$$

$$= \frac{\frac{1}{5x^2}}{15} = \frac{15}{5x^2}$$

$$= \boxed{\frac{e^{15}}{3}}$$

$$= \frac{1}{5x^2} \cdot 15$$

Discontinuità delle funzioni

$$\boxed{\exists \lim_{x \to c} f(x) = f(c)}$$

$\Downarrow$

- esistenza del limite finito
- esistenza di f calcolata nel punto c
- coincidenza del limite di f per x che tende al punto c con f calcolata nel punto c

Se non si verifica anche MEZZA di queste tre condizione la funzione è discontinua

f CONTINUA

ES. $f(x) = x^2 - 4$

in $x=2$ $f(2) = 4 - 4 = 0$

$\exists \lim_{x \to 2} x^2 - 4 = 0 = f(2)$

$x^2 - 4$ CONTINUA IN $x = 2$

Discontinuità di 1° specie

$$\boxed{\lim_{x \to c^-} f(x) \neq \lim_{x \to c^+} f(x)}$$

Dom f: $x \neq 0$

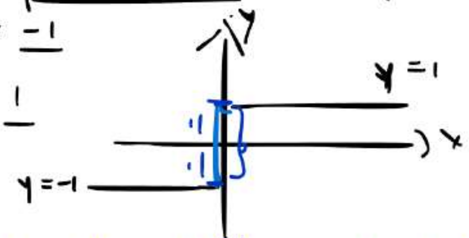
$$\frac{x}{|x|} = \begin{cases} \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}} = 1 & \text{se } x \geq 0 \\ \frac{\cancel{x}}{-\cancel{x}} = -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Limite destro e sinistro di f(x) non coincidono

$$\boxed{f(x) = \frac{x}{|x|}} \qquad \frac{x}{|x|} = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} -1 = \underline{-1}$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} 1 = \underline{1}$$



SALTO DI DISC $= \left| \lim_{x \to 0^+} f(x) - \lim_{x \to 0^-} f(x) \right| = |1 - (-1)| = |1+1|$

$= \underline{2}$

Discontinuità di 2° specie

$$\boxed{\lim_{x \to c^-} f(x) = l \qquad \lim_{x \to c^+} f(x) = \infty}$$

$$\boxed{\lim_{x \to c} f(x) = \infty}$$

Cioè esistenza non finita del limite per x che tende al punto c

$$\boxed{\nexists \lim_{x \to c} f(x)}$$

Cioè non esistenza del limite, sia convergente che divergente

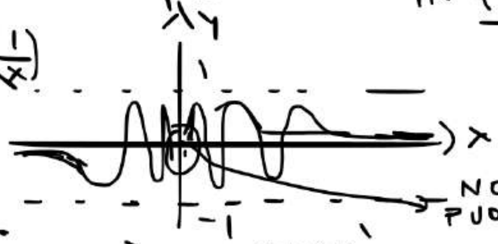
ES $f(x) = \mathrm{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$

Dom $x \neq 0$

$\mathbb{R} \setminus \{0\}$

$\lim\limits_{x \to 0} \mathrm{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$

$\mathrm{sen}(\infty)$?!!



$\lim\limits_{x \to \infty} \mathrm{sen}\frac{1}{x} = \mathrm{sen}\left(\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x}\right) = \ldots$ 0

$\nexists \lim\limits_{x \to 0} \mathrm{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$

$x = 0$ È DISCONTINUITÀ DI 2^a SPECIE

NON SI PUO' DETERMINARE PER $x \to 0$

$f(x) = tg\,x$

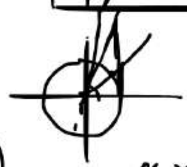
$\exists \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} tg\,x = tg\frac{\pi}{2} = +\infty$

$\boxed{\nexists\ tg\frac{\pi}{2} \quad \nexists\ f\left(\frac{\pi}{2}\right)}$

$\exists \lim_{x \to -\frac{\pi}{2}} tg\,x = tg\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -tg\frac{\pi}{2}$

$= -(+\infty)$

$= -\infty$



$f(-x) = -f(x)$

$x = \pm\frac{\pi}{2}$ PUNTI DI DISCONTINUITÀ DI 2^a SPECIE

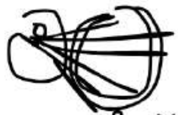
Discontinuità di 3° specie o eliminabile

Il punto di discontinuità di 3° specie o eliminabile si verifica quando il valore della funzione calcolata in quel punto non coincide con il valore limite della funzione per x che tende a quel punto.

$$\boxed{\exists \quad \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \underline{1}}$$

$$f(0) \neq \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

$$\boxed{f(c) \neq \lim_{x \to c} f(x)}$$



infinite immagini

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$$

$$f(0) = \frac{\operatorname{sen} 0}{0} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

$\underline{\exists\, !\, f(0)}$ $\quad \exists$ ne non unica

nel caso di f non esiste!!!

$$f(x) = \frac{2x^2 - x - 1}{x - 1} \qquad x \neq 1 \quad \boxed{\text{Dom } f \quad \mathbb{R} \setminus \{1\}}$$

$P = -2$

$S = -1$

$1 \qquad -2$

$$\lim_{x \to 1} \frac{2x^2 - x - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(2x+1)\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}} =$$

$$= \lim_{x \to 1} 2x + 1 = 2 \cdot 1 + 1 = \underline{3}$$

$$2x^2 + x - 2x - 1 =$$

$$= x(2x+1) - 1(2x+1) =$$

$$= (2x+1)(x-1)$$

$$f(1) = \frac{2 - 1 - 1}{1 - 1} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

$$f(1) \neq \lim_{x \to 1} \frac{2x^2 - x - 1}{x - 1} = 3$$