

LEZIONE 18

Teorema di esistenza degli zeri

IP $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$
 CONTINUA IN $[a, b]$
 $1^a \quad f(a) > 0 \quad f(b) < 0$
 $2^a \quad f(a) < 0 \quad f(b) > 0$
 TS
 $\exists c \in [a, b]: f(x=c) = 0$

$$[a, b] \subseteq \mathbb{R}$$

ESEMPIO

$$f(x) = \underline{x} + \underline{2^x}$$

$$f: [-1; 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(-1) < 0 ; f(1) > 0$$

$$[f(-1) < 0 ; f(1) > 0]$$

$$f(-1) = -1 + 2^{-1} = -1 + \frac{1}{2} = \frac{-2+1}{2} = -\frac{1}{2} < 0$$

$$\begin{matrix} f(-1) < 0 \\ f(1) > 0 \end{matrix}$$

$$f(1) = 1 + 2^1 = 1 + 2 = 3 > 0$$

f CONTINUA PERCHÉ SOMMA DI
FUNZIONI CONTINUE

$$f(c) = 0$$

$$c + 2^c = 0$$

$$c \approx 0.7$$

Teorema di Bolzano - Weierstrass

$$IP \quad f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \\ \text{CONTINUA}$$

$$TS \quad \exists \max_{x \in [a, b]} f \\ \min_{x \in [a, b]} f$$

$$[a, b] \subseteq \mathbb{R}$$

$$y = f(x) = x^2$$

$$f: [-1; 2] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(0) = 0$$

$$\min f = 0$$

$$\text{in } x = 0 \in [-1; 2]$$

$$f(2) = 4$$

$$\max f = 4$$

$$\text{in } x = 2 \in [-1; 2]$$

$$y = f(x) = \frac{1}{x}$$

$$f: [-1; 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\text{in } x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$



DISCONTINUA IN SPECIE

NON È
CONTINUA IN $[-1; 1]$

DERIVAZIONE

Rapporto incrementale

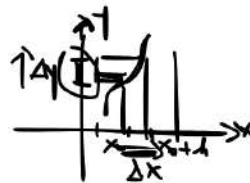
E' un rapporto di variazioni delle due variabili: x (variabile indipendente) e y (variabile dipendente).
In particolare è il rapporto fra la variazione della y rispetto alla variazione della x

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$\Delta y = y - y_0 = f(x) - f(x_0)$$

$$\Delta y = f(x_0 + h) - f(x_0)$$

$$\Delta x = x - x_0 = x_0 + h - x_0 = h$$



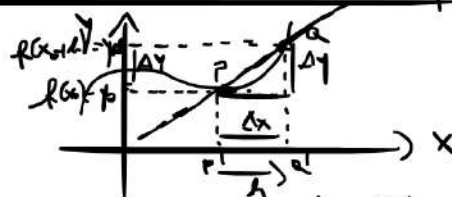
$$y = f(x)$$

$$y_0 = f(x_0)$$

$$x = x_0 + h$$

$h \in \mathbb{R}$
INCREMENTO
DELLE ASCISSE

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$



$$m_{PQ} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

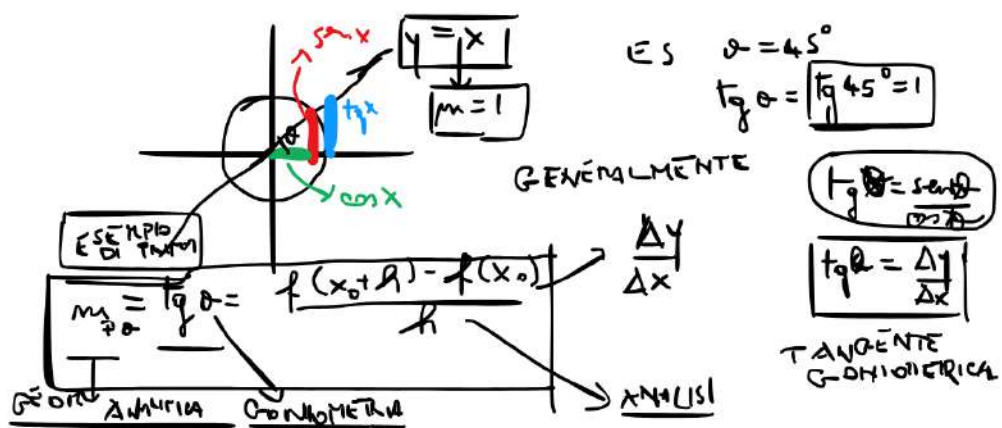
$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$P(x_0, y_0)$$

$$Q(x_0+h, y_1)$$

$$y = mx$$

Il rapporto incrementale è il coefficiente angolare della retta secante il grafico di $y=f(x)$ nei punti P e Q e rappresentanti gli estremi del segmento PQ, che ha per proiezioni P' e Q' che sono gli estremi dell'incremento sull'asse orizzontale.



Ex. $f(x) = 4x^2 - 2x + 3$

$h = \frac{1}{2}$

$\frac{\Delta y}{\Delta x} (x_0 = 1) = ?$

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \\ &= \frac{f(1 + \frac{1}{2}) - f(1)}{\frac{1}{2}} = 2 [f(\frac{3}{2}) - f(1)] = \\ &= 2 [4 \cdot \frac{9}{4} - 2 \cdot \frac{3}{2} + 3 - (4 - 2 + 3)] = \\ &= 2 [9 - 3 + 3 - 5] = 2 \cdot 4 = 8 = m_{pa} \end{aligned}$$

$$P(1; 5)$$

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = 9$$

$$Q = \left(\frac{3}{2}; 9\right)$$

$$\boxed{\frac{y - y_p}{y_a - y_p} = \frac{x - x_p}{x_a - x_p}}$$

$$\frac{y - 5}{9 - 5} = \frac{x - 1}{\frac{3}{2} - 1}$$

$$\frac{y - 5}{4} = \frac{x - 1}{\frac{3 - 2}{2}}$$

$$\frac{y - 5}{4} = \frac{2(x - 1)}{1}$$

$$y - 5 = 8(x - 1) \quad y = mx + q$$

$$y = 8x - 8 + 5 \quad y = 8x - 3$$

FO- RETTA
PASSA DITE PER
P E Q

Cosa succede se l'incremento h sull'asse orizzontale comincia a restringersi fino ad annullarsi? Cioè cosa succede se l'incremento h tende al valore 0?!

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$$

Derivata prima della funzione f calcolata nel punto x_0

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x)$$

Funzione derivata prima di $f(x)$

$$\begin{array}{l} y' (f'(x)) \\ D_x y; D_y; \\ D f(x) \end{array}$$

NOTAZIONI
POSSIBILI

$$f'_-(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

$$f'_+(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Derivate sinistra e destra di $f(x)$ calcolate nel punto x_0

$$y = f(x) = x^3$$

$$f'(x_0=2) = ?$$

$$\textcircled{1} \frac{1}{3} \frac{2}{3} \textcircled{1}$$

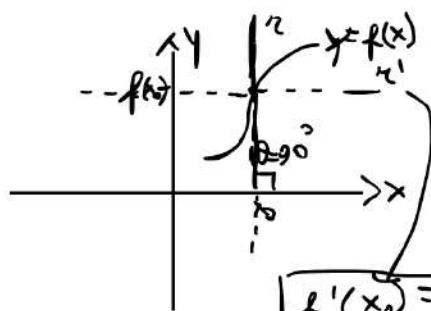
$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} &= \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2+h)^3 - 8}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cancel{8} + h^3 + 3 \cdot 4 \cdot h + 3 \cdot 2 \cdot h^2 - \cancel{8}}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^3 + 6h^2 + 12h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cancel{h}(h^2 + 6h + 12)}{\cancel{h}} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \underbrace{h^2}_0 + \underbrace{6h}_0 + \underbrace{12}_{12} = \underline{12} \quad \boxed{f'(2) = 12} \end{aligned}$$

Significato geometrico della derivata

La derivata di una
coefficiente angolare

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \\ &= m_{PQ} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} &= f'(x_0) = m_{\text{tangent}} \end{aligned}$$

La derivata di una funzione calcolata in un punto è il coefficiente angolare della retta tangente in $(x_0, f(x_0))$ al grafico della funzione.



CASO

$$f'(x_0) = m_t = 0$$

è tangente
al grafico $y = f(x)$
in $(x_0, f(x_0))$
 $m_t = \tan 90^\circ$
 ~~$\tan 90^\circ$~~
PARTICOLARE
TANGENTE
ORIZZONTALE.

TEOREMA DELLA CONTINUITA' DELLE FUNZIONI DERIVABILI

$Ip \quad y = f(x) \quad \text{se} \exists f'(x_0) \Rightarrow f \text{ DERIVABILE IN } x_0$
 $Ts \quad f \text{ CONTINUA IN } x_0$
Dim $f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$
 $\Downarrow$
 $\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0) + \epsilon(h)$

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = h [f'(x_0) + \varepsilon(h)]$$

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + h [f'(x_0) + \varepsilon(h)]$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) = \lim_{h \rightarrow 0} f(x_0) + \lim_{h \rightarrow 0} h [f'(x_0) + \varepsilon(h)]$$

PASSIAMO
AL
TUTTO
LIMITE PER $h \rightarrow 0$

$$\boxed{\lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) = f(x_0)}$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)}$$

$x = x_0 + h$
 $h \rightarrow 0$

$\hookrightarrow f$ CONTINUA in x_0

C.V.d