Appunti ordinati - Teoria cinetica dei gas

Video
In laboratorio

Risposte alle
domande della teoria

Approfondimenti

1 La teoria cinetica dei gas

→ Esercizi a pag. 435

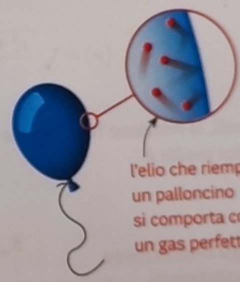
Per definizione un gas perfetto soddisfa le due leggi di Gay-Lussac e la legge di Boyle. In pratica un gas è considerato perfetto se è abbastanza rarefatto ed è lontano dal punto di liquefazione.

Queste condizioni sono *macroscopiche*, cioè riguardano lo stato d'insieme del gas senza alcun riferimento alle molecole che lo compongono e al loro movimento.

Il movimento continuo e disordinato delle molecole, messo in evidenza dal moto browniano [→ pag. 412] delle particelle che ne subiscono gli urti, è chiamato **agitazione termica**.

Tenendo conto dell'agitazione termica delle molecole, i gas possono essere studiati anche dal punto di vista *microscopico* tramite la cosiddetta *teoria cinetica dei gas*. Secondo questa teoria, le molecole di un gas perfetto:

- sono molto piccole in confronto alle reciproche distanze;
- si muovono in tutte le direzioni, in modo indipendente l'una dall'altra;
- interagiscono tra loro solo tramite urti elastici e, prima e dopo ogni urto, esercitano forze intermolecolari trascurabili;
- compiono urti elastici contro le pareti del recipiente.



l'elio che riempie un palloncino si comporta come un gas perfetto

Tra un urto e l'altro le molecole di un gas perfetto si muovono di moto rettilineo uniforme. In linea di principio, ogni singolo movimento potrebbe essere studiato mediante le leggi della meccanica, ma in pratica non è possibile seguire le molecole una per una a causa del loro grande numero. Invece, si possono calcolare i *valori medi* delle grandezze microscopiche, per esempio delle velocità e delle energie cinetiche molecolari, e in funzione di essi esprimere le grandezze macroscopiche del gas, come la pressione e la temperatura.

La **teoria cinetica** interpreta in termini microscopici le proprietà macroscopiche del gas.

L'energia cinetica media

Una delle grandezze microscopiche medie che caratterizzano un gas è l'**energia cinetica media** K_m delle sue molecole. Questa grandezza è la media aritmetica delle energie cinetiche $K_1, K_2, \ldots K_N$ delle N molecole del gas, cioè il rapporto tra l'energia cinetica totale K_{tot}, somma delle singole energie cinetiche, e il numero N:

$$K_m = \frac{K_{tot}}{N} = \frac{K_1 + K_2 + \ldots + K_N}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{N} K_i}{N} \quad [1]$$

ENERGIA CINETICA MEDIA

Spesso una singola molecola è descritta come un punto materiale, che può solo traslare. A volte invece, oltre alle traslazioni, è importante tenere conto dei movimenti di rotazione delle molecole su sé stesse e dell'energia cinetica a essi associata [→ par. 6].

L'energia cinetica di *traslazione* di una molecola è il semiprodotto della sua massa per il modulo quadrato della sua velocità. Le N molecole di un gas hanno in generale velocità $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \dots \vec{v}_N$ diverse. Supponiamo, per semplicità, che tutte quante abbiano la stessa massa m (cioè che il gas non sia una miscela di sostanze diverse). Allora, possiamo scrivere l'**energia cinetica media di traslazione** $K_{m,\,\text{trasl}}$ come segue:

$$K_{m,\text{trasl}} = \frac{\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m v_i^2}{N} = \frac{1}{2} m \frac{\sum_{i=1}^{N} v_i^2}{N} \qquad [2]$$

La velocità quadratica media

Nella [2] compare la media aritmetica dei moduli quadrati delle velocità. La radice quadrata di questa grandezza si chiama **velocità quadratica media** e si indica con $\langle v \rangle$:

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_N^2}{N}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} v_i^2}{N}} \qquad [3]$$

VELOCITÀ QUADRATICA MEDIA

Quindi, la relazione tra l'energia cinetica media di traslazione e la velocità quadratica media è

$$\underbrace{K_{m,\text{trasl}}}_{\text{energia cinetica media di traslazione (J)}} = \frac{1}{2} \overbrace{m}^{\text{massa di una molecola (kg)}} \underbrace{\langle v \rangle^2}_{\text{velocità quadratica media (m/s)}} \qquad [4]$$

ENERGIA CINETICA MEDIA DI TRASLAZIONE

2 La pressione dal punto di vista microscopico

→ Esercizi a pag. 436

Secondo la teoria cinetica,

la pressione esercitata da un gas perfetto è dovuta agli urti delle molecole del gas contro le pareti del recipiente che le contiene.

La pressione in funzione della velocità quadratica media

Con un procedimento statistico [→ pag. 415] è possibile calcolare la forza media esercitata dalle molecole sulle pareti e, di conseguenza, la pressione p:

$$\underbrace{p}_{\text{pressione (Pa)}} = \frac{\overbrace{N}^{\text{numero di molecole}}\overbrace{m}^{\text{massa di una molecola (kg)}}\underbrace{\langle v \rangle^2}_{\text{velocità quadratica media (m/s)}}}{3\underbrace{V}_{\text{volume (m}^3)}} \qquad [5]$$

PRESSIONE IN FUNZIONE DELLA VELOCITÀ QUADRATICA MEDIA

Che cosa dice la formula

Questa equazione collega le due grandezze macroscopiche p e V, pressione del gas e volume del recipiente, alle grandezze microscopiche m, N e $\langle v \rangle$. Perciò, costituisce un ponte logico tra le proprietà con cui siamo abituati a caratterizzare lo stato complessivo di un gas e le proprietà «nascoste» delle molecole del gas.

Gli urti elastici delle molecole contro una parete

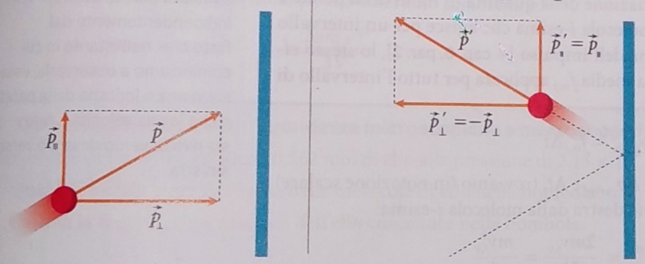
Come in tutti gli urti, anche in quello di una molecola di un gas contro una parete del recipiente la quantità di moto totale si conserva [→ cap. 6, par. 3]. Ciò significa che la variazione di quantità di moto $\Delta\vec{p}_{\text{parete}}$ della parete è uguale e opposta alla variazione di quantità di moto $\Delta\vec{p}$ della molecola che rimbalza:

Video In laboratorio
Modello microscopico di un gas perfetto

$$\Delta\vec{p}_{\text{parete}} = -\Delta\vec{p} \qquad [6]$$

In generale, le molecole urtano le pareti in direzione obliqua.

- Prima dell'urto, la quantità di moto $\vec{p}$ di una molecola è somma di un vettore $\vec{p}_\parallel$ parallelo alla parete e un vettore $\vec{p}_\perp$ perpendicolare.
- Se l'urto è elastico, la quantità di moto finale $\vec{p}\,'$ è somma di un vettore parallelo $\vec{p}\,'_\parallel = \vec{p}_\parallel$ e un vettore perpendicolare $\vec{p}\,'_\perp = -\vec{p}_\perp$.



Quindi la variazione della quantità di moto della molecola è perpendicolare alla parete:

$$\Delta\vec{p} = \vec{p}\,' - \vec{p} = \vec{p}\,'_\parallel + \vec{p}\,'_\perp - (\vec{p}_\parallel + \vec{p}_\perp) = \vec{p}_\parallel - \vec{p}_\perp - (\vec{p}_\parallel + \vec{p}_\perp) =$$
$$= \cancel{\vec{p}_\parallel} - \vec{p}_\perp - \cancel{\vec{p}_\parallel} - \vec{p}_\perp = -2\vec{p}_\perp$$

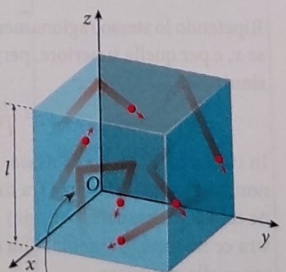
Per la [6], anche la variazione della quantità di moto della parete è perpendicolare alla parete:

$$\Delta\vec{p}_{\text{parete}} = -\Delta\vec{p} = 2\vec{p}_\perp \qquad [7]$$

Deduzione della formula della pressione

Consideriamo un gas di N molecole, ciascuna di massa m, contenuto in un recipiente cubico con spigolo di lunghezza l e quindi di volume $V = l^3$. Fissiamo una terna di assi cartesiani paralleli agli spigoli del cubo.

Le molecole urtano tra di loro in modo elastico e, trascurando l'effetto della loro forza-peso, senza una direzione privilegiata. Possiamo allora assumere che questi urti abbiano un effetto medio esattamente nullo e che ogni molecola si muova di moto rettilineo uniforme da una parete all'altra.



tramite gli urti, le molecole esercitano su ciascuna faccia del cubo una forza media a essa perpendicolare

VARIAZIONE DELLA QUANTITÀ DI MOTO NEL SINGOLO URTO Chiamiamo $\vec{v}_i$ la velocità della molecola i-esima e studiamo l'urto di questa molecola contro la parete destra del recipiente, perpendicolare all'asse y. La proiezione lungo y della quantità di moto della molecola è $\vec{p}_{i,y} = m\vec{v}_{i,y}$. Supponiamo che questo vettore sia rivolto verso la parete.

L'equazione [7] dice che, con l'urto, la quantità di moto della parete subisce una variazione uguale al doppio di $\vec{p}_{i,y}$. In notazione scalare si ha

$$\Delta p_{\text{parete}} = 2p_{i,y} = 2mv_{i,y}$$

Quindi possiamo scrivere:

$$p = \frac{m}{3l^3} \sum_{i=1}^{N} v_i^2$$

Infine, moltiplichiamo e dividiamo il secondo membro per N e indichiamo con V il volume l^3 del recipiente:

$$p = \frac{Nm}{3V} \frac{\sum_{i=1}^{N} v_i^2}{N}$$

Il fattore $\frac{\sum_{i=1}^{N} v_i^2}{N}$ è la media aritmetica dei moduli quadrati delle velocità, cioè, per la definizione [3], il quadrato della velocità quadratica media $\langle v \rangle$. Abbiamo così ottenuto la formula [5] che volevamo dimostrare:

$$[3] \quad \langle v \rangle = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} v_i^2}{N}}$$

$$p = \frac{Nm\langle v \rangle^2}{3V}$$

PROBLEMA MODELLO 1 **Grandezze microscopiche e macroscopiche**

Una bombola da 10,0 L contiene 0,862 mol di elio alla pressione di $2{,}15 \times 10^5$ Pa.

1 Qual è l'**energia cinetica media** delle molecole di elio nella bombola?

2 Calcola la **temperatura assoluta** dell'elio contenuto nella bombola.

DATI
- $V = 10{,}0\ \text{L} = 10{,}0 \times 10^{-3}\ \text{m}^3$
- $n = 0{,}862$ mol
- $p = 2{,}15 \times 10^5$ Pa

INCOGNITE
- $K_m = ?$
- $T = ?$

RISOLUZIONE

1 Le molecole monoatomiche di elio sono ben rappresentate da punti materiali che possono solo traslare. La loro energia cinetica media è dunque un'energia cinetica media di traslazione, data dalla [4]:

$$K_m = K_{m,\text{trasl}} = \frac{1}{2} m\langle v \rangle^2$$

Ricaviamo il termine $m\langle v \rangle^2$ dalla [5], che fornisce la pressione dal punto di vista microscopico:

$$p = \frac{Nm\langle v \rangle^2}{3V} \implies m\langle v \rangle^2 = \frac{3pV}{N}$$

calcolo della velocità quadratica media in funzione della pressione

Otteniamo così

$$K_m = \frac{1}{2} m\langle v \rangle^2 = \frac{1}{2} \frac{3pV}{N}$$

con $N = nN_A = (0{,}862\ \text{mol})(6{,}02 \times 10^{23}\ \text{mol}^{-1}) = 5{,}19 \times 10^{23}$.

Quindi, ricaviamo

$$K_m = \frac{3pV}{2N} = \frac{3(2{,}15 \times 10^5\ \text{Pa})(10{,}0 \times 10^{-3}\ \text{m}^3)}{2(5{,}19 \times 10^{23})} = \mathbf{6{,}21 \times 10^{-21}\ J}$$

calcolo dell'energia cinetica media

2 Isolando la temperatura assoluta nell'equazione di stato del gas perfetto $pV = nRT$, otteniamo

$$T = \frac{pV}{nR} = \frac{(2{,}15 \times 10^5\ \text{Pa})(10{,}0 \times 10^{-3}\ \text{m}^3)}{(0{,}862\ \text{mol})\left(8{,}3145\ \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}\right)} = \mathbf{300\ K}$$

calcolo della temperatura assoluta

INTERVALLO DI TEMPO TRA DUE URTI La molecola si muove lungo y con velocità di modulo sempre uguale a $v_{i,y}$. Una volta urtata la parete destra, la molecola percorre lungo y una distanza l fino alla parete sinistra, rimbalza e ritorna alla parete destra dopo aver attraversato un'altra distanza l.

Quindi, nell'intervallo di tempo Δt tra un urto e l'altro contro la stessa parete, la molecola viaggia per una distanza $\Delta y = 2l$.

Dalla relazione $v_{i,y} = \dfrac{\Delta y}{\Delta t}$ troviamo

$$\Delta t = \frac{\Delta y}{v_{i,y}} = \frac{2l}{v_{i,y}}$$

In un tempo di durata Δt la molecola percorre avanti e indietro tutta la distanza tra le due facce perpendicolari all'asse y. →

Di sicuro, in Δt, ogni molecola compie un urto contro la parete destra, indipendentemente dal fatto che, nell'istante in cui cominciamo a osservarla, essa sia vicina o lontana dalla parete e che la sua velocità lungo y sia rivolta verso destra o verso sinistra.

FORZA MEDIA SULLA PARETE La variazione della quantità di moto della parete è prodotta dalla forza d'urto della molecola i-esima che agisce per un intervallo di tempo brevissimo. Per il teorema dell'impulso [→ **cap. 6, par. 2**], lo stesso effetto sarebbe prodotto da una forza media $f_{m,i}$ applicata per tutto l'intervallo di tempo Δt tra due urti consecutivi:

$$\Delta p_{\text{parete}} = f_{m,i}\Delta t$$

Usando le espressioni ottenute per Δp_{parete} e Δt, troviamo (in notazione scalare) la forza media esercitata sulla parete destra dalla molecola i-esima:

$$f_{m,i} = \frac{\Delta p_{\text{parete}}}{\Delta t} = \frac{\cancel{2}mv_{i,y}}{\dfrac{\cancel{2}l}{v_{i,y}}} = \frac{mv_{i,y}^2}{l}$$

Questa forza è perpendicolare alla parete, come lo è la variazione della quantità di moto. Poiché tutte le forze esercitate dalle N molecole hanno la stessa direzione e lo stesso verso, la forza media risultante F_m sulla parete destra è la somma degli N termini $f_{m,i}$, che differiscono per il valore di $v_{i,y}$:

$$F_m = \sum_{i=1}^{N} \frac{mv_{i,y}^2}{l} = \frac{m}{l}\sum_{i=1}^{N} v_{i,y}^2$$

DALLA FORZA MEDIA ALLA PRESSIONE La pressione p è il rapporto tra F_m e l'area l^2 della parete:

$$p = \frac{F_m}{l^2} = \frac{m}{l^3}\sum_{i=1}^{N} v_{i,y}^2$$

Ripetendo lo stesso ragionamento per la parete anteriore, perpendicolare all'asse x, e per quella superiore, perpendicolare all'asse z, otteniamo per p le espressioni

$$p = \frac{m}{l^3}\sum_{i=1}^{N} v_{i,x}^2, \quad p = \frac{m}{l^3}\sum_{i=1}^{N} v_{i,z}^2$$

In tutti e tre i casi p è la stessa. Infatti, trascurando la forza-peso lungo l'asse z, non c'è alcuna differenza tra una direzione e l'altra: poiché il moto di agitazione termica è casuale, per ogni molecola che compie un urto con la parete destra ce ne sono, in media, una che colpisce la parete anteriore e una che colpisce quella superiore.

Sommiamo membro a membro le tre espressioni di p e otteniamo

$$3p = \frac{m}{l^3}\sum_{i=1}^{N}\left(v_{i,x}^2 + v_{i,y}^2 + v_{i,z}^2\right) \implies p = \frac{m}{3l^3}\sum_{i=1}^{N}\left(v_{i,x}^2 + v_{i,y}^2 + v_{i,z}^2\right)$$

Il termine generico della sommatoria è il modulo quadrato della velocità della molecola i-esima ($v_i^2 = v_{i,x}^2 + v_{i,y}^2 + v_{i,z}^2$).

13 Un contenitore cilindrico ha l'asse disposto in orizzontale e le sue basi distano 12 cm l'una dall'altra. Una molecola di gas si muove a $5{,}0 \times 10^2$ m/s perpendicolarmente alle basi, rimbalzando avanti e indietro.

- ▶ Calcola l'intervallo di tempo tra due urti successivi della molecola contro la base destra del contenitore.
- ▶ Quanti urti sulla base destra si hanno in un intervallo di tempo di 12 s?

[$4{,}8 \times 10^{-4}$ s; $2{,}5 \times 10^4$]

14 Un atomo di elio, di massa $6{,}64 \times 10^{-27}$ kg, urta elasticamente contro la parete di un recipiente in direzione perpendicolare alla parete stessa. La sua energia cinetica di traslazione vale $6{,}21 \times 10^{-21}$ J.

- ▶ Calcola il modulo della variazione della quantità di moto della parete. [$1{,}82 \times 10^{-23}$ kg · m/s]

15 Una scatola contiene al suo interno gas azoto, le cui molecole hanno massa $4{,}65 \times 10^{-26}$ kg e velocità quadratica media $5{,}20 \times 10^2$ m/s. La scatola è un parallelepipedo di altezza $l = 8{,}02$ cm e con base di area S. Le molecole di azoto esercitano sulla base una forza media complessiva di modulo 1,00 N.

- ▶ Quante molecole di azoto ci sono nella scatola?

Suggerimento: nella formula [5] della pressione esprimi il volume della scatola in termini dell'area di base e dell'altezza.

[$1{,}91 \times 10^{19}$]