Lezione 19

La funzione esponenziale

$$\boxed{f(x) = a^x}$$

$$\boxed{f(x) = x^2}$$

FUNZ POTENZA

$\boxed{a > 0}$

$y = f(x) = 2^x$

$A(0;1)$

x	y
0	1
1	2
2	4
3	8

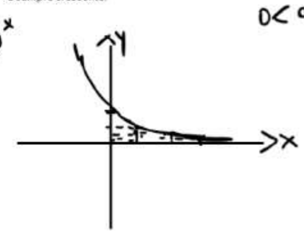
$a > 1$

Quando la base è maggiore di 1 la funzione esponenziale è sempre crescente.

$0 < a < 1$

$y = f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

x	y
0	1
1	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{4}$
3	$\frac{1}{8}$



Quando la base è minore di 1 la funzione esponenziale è sempre decrescente.

$$\boxed{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}}$$

DOMINIO CODOMINIO

La funzione esponenziale ha come dominio tutto l'insieme reale e come codominio tutti i reali positivi tranne zero.

La funzione esponenziale è sia iniettiva che suriettiva si dice biiettiva, e quindi ammette una funzione inversa?!?!?

Logaritmo numerico

$\boxed{a^{x} = q}$

$\boxed{x = \log_{a} q}$

ARGOMENTO

BASE

$q \in \mathbb{R};\ q > 0$

$a > 0;\ a \neq 1$

$a \in \mathbb{R}$

il logaritmo non è altro che
l'operazione inversa dell'esponenziale.

$2^{3} = 8$

$\boxed{3 = \log_{2} 8}$

Il logaritmo è quel numero da elevare alla base
per ottenere il suo argomento.

$\boxed{\log_{3} 27 = 3}$

$3^{x} = 27$

$\boxed{\log_{32} 2 = \frac{1}{5}}$

$32^{x} = 2$

32	2
16	2
8	2
4	2
2	2
1	

$32 = 2^{5}$

$$\boxed{\begin{gathered}\sqrt[5]{32} = 2 \\ \Downarrow \\ 32^{\frac{1}{5}} = 2\end{gathered}}$$

Prime proprietà banali dei logaritmi.

$a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$

1) $\log_a 1 = 0$ $\qquad a^0 = 1$

2) $\log_a a = 1$ $\qquad a^1 = a$

$1^5 = 1$

$\log_1 5 = ?!?$ $\qquad 1^x = 5$

$a=2 \quad \underline{a>1}$

La funzione logaritmica

$\boxed{y = \log_a x}$

La funzione logaritmica non è altro che l'inversa della funzione esponenziale

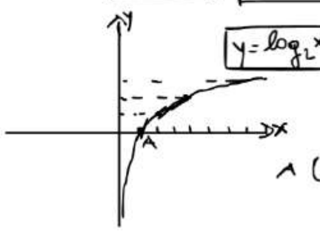
$\boxed{f: \underline{\mathbb{R}^+ \setminus \{0\}} \longrightarrow \underline{\mathbb{R}}}$

$\boxed{\text{DOMINIO}}$ $\boxed{\text{CODOMINIO}}$

$y = \log_2 x$

x	y
1	0
2	1
4	2
8	3

$\boxed{y = \log_2 x}$

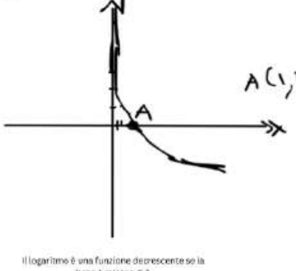


A (1,0)

Il logaritmo è una funzione crescente se la base è maggiore di 1

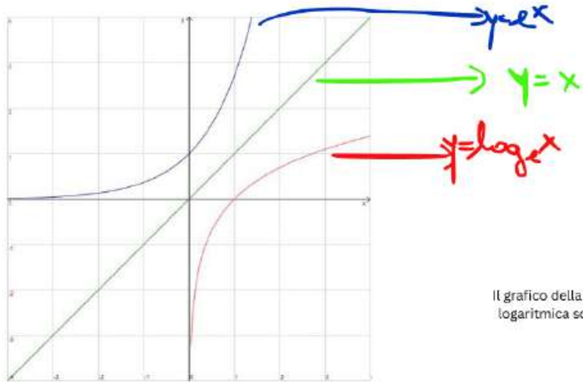
$y = \log_{\frac{1}{2}} x$ $\quad 0 < a < 1$

x	y
1	0
$\frac{1}{2}$	1
$\frac{1}{4}$	2
$\frac{1}{8}$	3



A(1,0)

Il logaritmo è una funzione decrescente se la base è minore di 1



Il grafico della funzione esponenziale e il grafico della funzione logaritmica sono simmetrici rispetto alla bisettrice del primo e del terzo quadrante.

Equazioni esponenziali del 1° e del 3° tipo

$$\boxed{a^{f(x)} = a^{g(x)}}$$

EQ. DEL 1° TIPO

$$\Rightarrow \boxed{f(x) = g(x)}$$

Due potenze a base uguale sono uguali, quando i due esponenti sono uguali.

Es.

$$2^x = 32 \Rightarrow 2^x = 2^5 \Rightarrow \boxed{x=5}$$

$$6^{2x} = 216^{2x-1}$$

$$6^{2x} = 6^{3(2x-1)} \Rightarrow 2x = 3(2x-1)$$

$$2x = 6x - 3$$

$$-4x = -3 \Rightarrow \boxed{x = \frac{3}{4}}$$

216	2
108	2
54	2
27	3
9	3
3	3
1	

$$216 = 2^3 \cdot 3^3 = (2\cdot 3)^3 = 6^3$$

$$\frac{(3^{x+1})^{2x-1}\cdot 27^{1-x}}{9^{2-x}} = 1$$

$9^{2-x} \neq 0$
$\forall x \in \mathbb{R}$

$$\frac{(3^{x+1})^{2x-1}\cdot 27^{1-x}}{\cancel{9^{2-x}}} = \frac{9^{2-x}}{\cancel{9^{2-x}}}$$

$27 = 3^3$
$9 = 3^2$

$$(3^{x+1})^{2x-1}\cdot 27^{1-x} = 9^{2-x}$$

$$(3^{x+1})^{2x-1}\cdot 3^{3(1-x)} = 3^{2(2-x)}$$

$$3^{(x+1)(2x-1)}\cdot 3^{3-3x} = 3^{4-2x}$$

$$3^{2x^2-x+2x-1}\cdot 3^{3-3x} = 3^{4-2x}$$

$$3^{2x^2-x+2x-1+3-3x} = 3^{4-2x}$$

$$2x^2-x+2x-1+3-3x = 4-2x$$

$$2x^2-\cancel{2x}+2 = 4-\cancel{2x} \implies \cancel{2}x^2 = \cancel{2}$$

$$x^2 = 1 \implies \boxed{x=\pm 1}$$

$$4^{\frac{x+2}{x}} = 16$$

C.E

$x \neq 0$

$$\cancel{4}^{\frac{x+2}{x}} = \cancel{4}^{2} \Longrightarrow \frac{x+2}{x} = \frac{2}{1}$$

$$\frac{x+2}{\cancel{x}} = \frac{2x}{\cancel{x}}$$

$$x+2=2x$$

$$-x=-2 \Longrightarrow \boxed{x=2}$$

Equazioni del 3° tipo

$$2^x + 2^{x-1} + 2^{x-2} = 7$$

$$2^x + 2^x \cdot 2^{-1} + 2^x \cdot 2^{-2} = 7$$

$$2^x + \frac{1}{2} \cdot 2^x + \frac{1}{4} 2^x = 7$$

$$\frac{t}{1} + \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}t = \frac{7}{1}$$

$$\cancel{4}\ \frac{4t + 2t + t}{\cancel{4}} = \frac{28}{\cancel{4}}\ \cancel{4}$$

$$7t = 28 \Longrightarrow t = \frac{28}{7} = 4$$

$$\boxed{2^x = t}$$ → VARIAB. AUSILIARIA

$$2^{x-1} = 2^x \cdot 2^{-1}$$

$$2^{x-2} = 2^x \cdot 2^{-2}$$

$$\boxed{a^{b+c} = a^b \cdot a^c}$$

$$\boxed{t = 4}$$

$$2^{x} = 4 = 2^{2}$$

$$\boxed{x = 2}$$

$$3^{2+\sqrt{x}} + 3^{1+\sqrt{x}} - 3^{\sqrt{x}} = 99$$

$$3^2 \cdot 3^{\sqrt{x}} + 3^1 \cdot 3^{\sqrt{x}} - 3^{\sqrt{x}} = 99$$

$$9 \cdot 3^{\sqrt{x}} + 3 \cdot 3^{\sqrt{x}} - 3^{\sqrt{x}} = 99$$

$$\boxed{3^{\sqrt{x}} = t}$$

$$9t + 3t - t = 99$$

$$11t = 99 \Longrightarrow t = \frac{\cancel{99}\,9}{\cancel{11}}$$

$$t = 9$$

$$3^{\sqrt{x}} = 9$$

$$3^{\sqrt{x}} = 3^2$$

$$\sqrt{x} = 2$$

$$\boxed{x = 4}$$

$$\boxed{\begin{cases} x \geq 0 \\ 2 > 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \\ x = 4 \end{cases}}$$

$$7^{1-x} + 7^{2-x} = 49^{x+\frac{1}{2}} + 49^{x+1}$$

$$7^1 \cdot 7^{-x} + 7^2 \cdot 7^{-x} = 7^{2(x+\frac{1}{2})} + 7^{2(x+1)}$$

$$7 \cdot 7^{-x} + 49 \cdot 7^{-x} = 7^{2x} \cdot 7 + 7^{2x} \cdot 7^2$$

$$7 \cdot \frac{1}{7^x} + 49 \cdot \frac{1}{7^x} = 7 \cdot 7^{2x} + 49 \cdot 7^{2x}$$

$$7 \cdot \frac{1}{t} + 49 \cdot \frac{1}{t} = 7 \cdot \frac{t^2}{1} + 49 t^2$$

$$\cancel{t} \quad \frac{7+49}{\cancel{t}} = \frac{7t^3 + 49t^3}{\cancel{t}} \cancel{t}$$

$$56 = 56t^3 \Rightarrow \cancel{} \quad 56t^3 = 56$$

$$t^3 = 1 \Rightarrow \boxed{t=1}$$

$$7^x = 1 \Rightarrow 7^x = 7^0 \Rightarrow \boxed{x=0}$$

$$\boxed{7^x = t}$$

C.E.

$t \neq 0$

$7^x \neq 0$

$\forall x \in \mathbb{R}$