Lezione 19

Centro di massa di un sistema di particelle e di un corpo rigido.

Il centro di massa rappresenta un punto geometrico individuato o nel sistema di particelle o nel corpo rigido, rispetto al quale la massa di tutto il sistema è equi - distribuita.

$$M = \sum_{i=1}^{m} m_i$$

Centro di massa di un sistema di particelle

$$\boxed{\begin{aligned} x_{CM} &= \frac{\sum_{i=1}^{m} m_i x_i}{M} \\ y_{CM} &= \frac{\sum_{i=1}^{m} m_i y_i}{M} \\ z_{CM} &= \frac{\sum_{i=1}^{m} m_i z_i}{M} \end{aligned}}$$

$$\boxed{\vec{r}_i = (x_i, y_i, z_i)}$$

Componenti del vettore distanza della i-esima particella dall'asse di rotazione

$$dm = \rho\, dV$$

Centro di massa di un corpo rigido

Numero di particelle troppo elevato, per poter essere contate

$$m \longrightarrow \infty$$

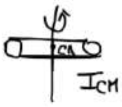
$$x_{CM} = \lim_{m \to \infty} \frac{\sum_{i=1}^{m} m_i x_i}{M} = \frac{1}{M} \int x\, dm = \frac{1}{M} \underbrace{\int x \rho\, dV = \frac{\rho}{M} \int x\, dV}_{\text{SOLO SE L'OGGETTO È COMPOSTO DA UN UNICO MATERIALE}}$$

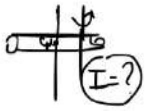
$$= \frac{\rho}{M} \iiint x\, dx\, dy\, dz$$

$$y_{CM} = \frac{\rho}{M} \iiint y\, dx\, dy\, dz$$

$$z_{CM} = \frac{\rho}{M} \iiint z\, dx\, dy\, dz$$

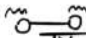
!





$$\boxed{I_{CM} = \sum_{i=1}^{n} m_i r_{\perp i}^2}$$

Voglio calcolare il momento di inerzia di un sistema di particelle o di un corpo rigido rispetto ad un asse non passante per il centro di massa. Come faccio?
Interviene un teorema.

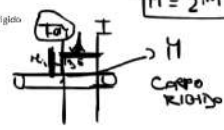


$M = \sum_{i=1}^{n} m_i$

$\boxed{M = 2m}$

TEOREMA DI HUYGENS - STEINER

Permette di calcolare il momento di inerzia di un qualunque corpo rigido o sistema di particelle rispetto ad un asse di rotazione non necessariamente passante per il centro di massa.



$$I = I_{CM} + M d^2$$

M è la massa totale del corpo
d è la distanza (ortogonale) fra asse passante per il centro di massa e asse qualunque

$$I = \sum_{i=1}^{n} m_i r_{i\perp}'^2$$

$$\vec{r}_{i\perp}' = (\vec{r}_i + \vec{d})_\perp$$

DISTANZE DALL'ASSE DI ROTAZ. PASSANTE PER IL CENTRO DI MASSA

DISTANZE DAL NUOVO ASSE

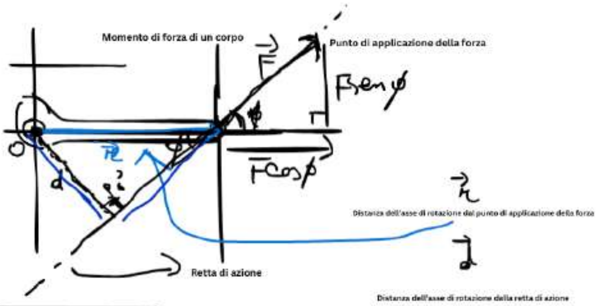
$$I = \sum_{i=1}^{n} m_i (\vec{r}_i + \vec{d})_\perp^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} m_i \left(r_{\perp i}^2 + d_\perp^2 + 2 \underbrace{\vec{r}_i \cdot \vec{d}}_{0}\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} m_i r_{\perp i}^2 + \sum_{i=1}^{n} m_i d_\perp^2 + 0 =$$

$$r_i \perp d_i = \vec{r}_i \cdot \vec{d}_i = 0$$

$$= I_{CM} + d_\perp^2 \underbrace{\sum_{i=1}^{n} m_i}_{M} = \underbrace{I_{CM} + M d^2}_{\text{c.v.d.}}$$



$$\boxed{d = r\,sen\,\phi}$$

Il momento di forza di un corpo è strettamente legato alla distanza fra l'asse di rotazione e la retta di azione relativa alla forza applicata.

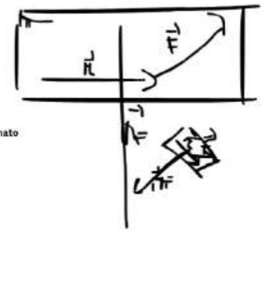
Per quanto riguarda il verso del momento di forza esso risulterà positivo se la rotazione del corpo è anti oraria, mentre negativo se la rotazione del corpo è oraria.

$$\vec{M}_F = \vec{r} \times \vec{F}$$

$\vec{r}$: Vettore distanza fra punto di applicazione della forza e asse di rotazione

$\vec{F}$: Vettore forza applicato

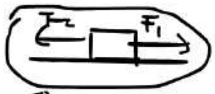
$$[m \cdot N] = [N \cdot m]$$

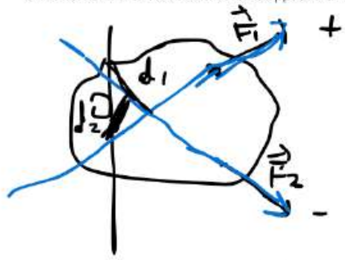


$\vec{M}_F$ avrà per direzione un vettore ortogonale al piano formato dai due vettori: r ed F.

Equilibrio nel moto rotazionale

Nel moto rotazionale si ha condizione di equilibrio nel momento in cui la risultante di tutti i momenti di forza applicati è zero.





$$\vec{F}_1 = \vec{F}_2$$

$$d_1 = d_2$$

$$\sum M_{\vec{F}} = |\vec{M}_{F_1} + \vec{M}_{\vec{F}_2}| =$$

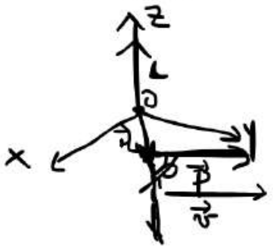
$$= F_1 \cdot d_1 - F_2 d_1 = \underline{0}$$

CONDIZ. EQUILIBRIO

Risultante del momento di forza applicato nullo e corpo che non ruota

Momento angolare

Il momento angolare è l'analogo rotazionale della quantità di moto nel caso traslazionale



$\vec{L} \perp$ piano xy

$$\boxed{\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}}$$

$$|\vec{L}| = rp \, sen\phi$$

Momento angolare di una particella

$$\boxed{m \cdot kg \cdot \frac{m}{s} = kg \cdot \frac{m^2}{s}}$$

$$\boxed{\frac{\Delta\, m\vec{v}}{\Delta t} = m\frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = m\vec{a} = \vec{F}}$$

Equazioni della dinamica rotazionale

$$\frac{\Delta \vec{L}}{\Delta t} = \frac{\Delta(\vec{r}\times\vec{p})}{\Delta t} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}\times\vec{p} + \vec{r}\times\frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t} =$$

$$\boxed{\frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t} = \vec{F}}$$

ANALOGO TRASLAZIONALE

$$= \cancel{\vec{v}\times\vec{p}} + \vec{r}\times\vec{F}$$

$\vec{v}$

$$= \vec{r}\times\vec{F} = \vec{M}_F$$

$$\boxed{\frac{\Delta(\vec{a}\times\vec{b})}{\Delta t} = \frac{\Delta\vec{a}}{\Delta t}\times\vec{b} + \vec{a}\times\frac{\Delta\vec{b}}{\Delta t}}$$

$\vec{v}\,//\,\vec{p} \Rightarrow \vec{v}\times\vec{p} = 0$

$$\boxed{\frac{\Delta\vec{L}}{\Delta t} = \vec{M}_F}$$

$\vec{L}$ e $\vec{M}_F$ vanno calcolati rispetto allo stesso asse fisso

Momento angolare di un sistema di particelle

$$\vec{L}_{TOT} = \sum_{i=1}^{m} \vec{L}_i = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 + \dots + \vec{L}_m$$

$$\boxed{\frac{\Delta \vec{L}_{TOT}}{\Delta t} = \vec{M}_{F_{TOT}} = \sum_{i=1}^{m} \vec{M}_{F_i}}$$

Analogo della seconda legge della dinamica nel caso rotazionale nel caso di un sistema di particelle

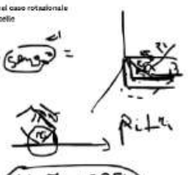
Momento angolare di un corpo rigido

$$\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i = \sum_i r_i p_i \operatorname{sen} \alpha =$$

$$= \sum_i r_{\perp i} m_i v_i$$

$$= \sum_i r_{\perp i} m_i (\vec{\omega} r_{\perp i}) =$$

$$= \vec{\omega} \sum m_i r_{\perp i}^2 = I \vec{\omega}$$



$p_i \perp r_i$

$\omega r_{i\perp} = v_i$

$$\boxed{\vec{L} = I \vec{\omega}} \qquad \boxed{\vec{p} = m \vec{v}}$$

ANALOGO ROTAZIONALE

$$\boxed{N \cdot m \frac{rad}{s} = Kg \cdot \frac{m}{s^2} \cdot \frac{m}{s} = Kg \cdot \frac{m^2}{s^3}}$$ UNITÀ DI MISURA

$$\frac{\Delta \vec{L}}{\Delta t} = \vec{M}_F = \frac{\Delta I \vec{\omega}}{\Delta t} = I \frac{\Delta \vec{\omega}}{\Delta t} = I \vec{\alpha}$$

$$\boxed{\vec{M}_F = I \vec{\alpha}} \qquad \boxed{\vec{F} = m \vec{a}}$$

ANALOGO ROTAZIONALE

Il momento angolare si conserva

$\Delta L = 0$

$$L_{iniz} = L_{fin} \qquad \boxed{I_{in} \omega_{in} = I_{fin} \omega_{fin}}$$

Cioè momento di inerzia e velocità angolare sono inversamente proporzionali l'uno con l'altro...(esempio: tuffatore e pattinatore sul ghiaccio).