Lezione 19

Operazioni algebriche con i polinomi

$$\frac{2}{3}-\frac{1}{4}=\frac{8-3}{12}=\frac{5}{12}$$

Somma algebrica con i polinomi

Questa operazione la so già fare, perchè sommare algebricamente due polinomi significa sommare i loro monomi simili.

$$\left(2a^2b+ab\right)+\left(\frac{1}{3}a^3b^2+\frac{2}{3}c+\frac{1}{3}a^2b\right)-\left(\frac{1}{3}a^2b+\frac{1}{4}c\right)$$

$$=2a^2b+ab+\frac{1}{3}a^3b^2+\frac{2}{3}c+\cancel{\frac{1}{3}a^2b}-\cancel{\frac{1}{3}a^2b}-\frac{1}{4}c=$$

$$=\boxed{2a^2b+ab+\frac{1}{3}a^3b^2+\frac{5}{12}c}$$

Moltiplicazione fra polinomi

Ci sono due casi relativi a questo tipo di moltiplicazione:

- monomio per polinomio
- polinomio per polinomio

Monomio per polinomio

$$a\cdot(a+b) = (a+b)\cdot a$$

$$= a\cdot a + a\cdot b = a^2 + ab$$

ES. $(2a^2+3ab)\cdot 2a =$

$$= (2a^2\cdot 2a) + (3ab\cdot 2a) = 4a^3 + 6a^2b$$

Per poter effettuare questo tipo di moltiplicazione bisogna applicare la proprietà distributiva del prodotto esterno rispetto la somma interna.

$$\boxed{\begin{aligned} 2\cdot(3+4) &= 2\cdot 3 + 2\cdot 4 = \\ &= 6+8 = 14 \end{aligned}}$$

PROPR. DISTRIBUTIVA NUMERICA

Polinomio per polinomio

$\boxed{ab = ba}$

Applicherò la proprietà distributiva tante volte quanti sono i monomi non simili del primo polinomio a moltiplicare (polinomio moltiplicando)

ES

$$(a+b)(a+b) = a\cdot a + a\cdot b + b\cdot a + b\cdot b =$$

$$= a^2 + 2ab + b^2$$

$$\left(\frac{2}{3}a^2c + \frac{3}{4}a^3b\right)\cdot\left(\frac{1}{2}a^3 + \frac{1}{3}b^3\right) =$$

$$= \cancel{\frac{2}{3}}^{1} a^2c \cdot \frac{1}{\cancel{2}_1}a^3 + \frac{2}{3}a^2c \cdot \frac{1}{3}b^3 + \frac{3}{4}a^3b \cdot \frac{1}{2}a^3 + \frac{\cancel{3}^{1}}{4}a^3b \cdot \frac{1}{\cancel{3}_1}b^3 =$$

$$= \frac{1}{3}a^5c + \frac{2}{9}a^2b^3c + \frac{3}{8}a^6b + \frac{1}{4}a^3b^4$$

Divisione polinomio - monomio

Si riapplica la proprietà distributiva esattamente come prima, con la differenza che stavolta devo dividere e non moltiplicare
N.B. La divisione deve essere sempre polinomio diviso monomio e mai l'opposto, in quanto la divisione non gode della proprietà commutativa!!!

$$\left(\frac{1}{3}a^2b^2+\frac{1}{4}a^3b^2\right):\frac{1}{2}ab=$$

$$=\left(\frac{1}{3}a^2b^2:\frac{1}{2}ab\right)+\left(\frac{1}{4}a^3b^2:\frac{1}{2}ab\right)=$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{1}ab+\frac{1}{_{2}\cancel{4}}\cdot\frac{\cancel{2}}{1}a^2b$$

$$=\frac{2}{3}ab+\frac{1}{2}a^2b$$

ES

$$(8+4):2=$$
$$=8:2+4:2=$$
$$=4+2=6$$

ok!

No!

$$2:(8+4)=2:8+2:4 \ldots$$
$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{1+2}{4}$$
$$=\frac{3}{4}\text{!!}$$

$$\left[\left(-\frac{2}{3}ax\right)^2+\frac{1}{2}ax\left(\frac{4}{3}a+\frac{5}{2}x\right)+a\left(\frac{2}{3}ax-\frac{5}{4}x^2\right)\right]:(-ax)=$$

$$=\left[\frac{4}{9}a^2x^2+\frac{\cancel{4}^{\,2}}{\cancel{6}_{\,3}}a^2x+\cancel{\frac{5}{4}ax^2}+\frac{2}{3}a^2x-\cancel{\frac{5}{4}ax^2}\right]:(-ax)=$$

$$=\left[\frac{4}{9}a^2x^2+\left(\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\right)a^2x\right]:(-ax)=$$

$$=\left[\frac{4}{9}a^2x^2+\frac{4}{3}a^2x\right]:(-ax)=$$

$$=-\frac{4}{9}ax-\frac{4}{3}a$$

Prodotti Notevoli

Sono prodotti fra polinomi che seguono una regola ben precisa
e sempre uguale per ogni prodotto di quella determinata tipologia.

Differenza di quadrati

$$\boxed{(a+b)\cdot(a-b) = a\cdot a - \cancel{ab} + \cancel{ab} - b\cdot b = \underline{a^2 - b^2}}$$

ES. $(2x+3)(2x-3) = (2x)^2 - (3)^2 = \underline{4x^2 - 9}$

Nel caso in cui capita il prodotto di due binomi che differiscono solo per un segno la regola é:
Il quadrato del primo meno il quadrato del secondo

Quadrato di binomio

$$(a \pm b)^2 = (a \pm b)(a \pm b) = a^2 \pm ab \pm ab + b^2 =$$
$$= \underline{a^2 \pm 2ab + b^2}$$

Quando elevo al quadrato un binomio la regoletta dice:
quadrato del primo termine + quadrato del secondo termine
+ o - doppio prodotto del primo termine per il secondo
termine.

$$(2x - 3)^2 = (2x)^2 - 2 \cdot (2x) \cdot 3 + 9 = \underline{4x^2 - 12x + 9}$$

Cubo di binomio

Elevare alla terza potenza un binomio significa moltiplicare quel binomio per sè stesso tre volte.

$$(a \pm b)^3 = (a \pm b)(a \pm b)(a \pm b) = (a \pm b)^2 (a \pm b) =$$
$$= (a^2 \pm 2ab + b^2)(a \pm b) =$$
$$= a^3 \pm a^2 b \pm 2a^2 b + 2ab^2 + ab^2 \pm b^3 =$$
$$= a^3 \pm 3a^2 b + 3ab^2 \pm b^3$$

Quando mi capita un binomio elevato alla terza potenza la regola dice:
cubo del primo termine + o - cubo del secondo termine, + o - triplo prodotto del quadrato del primo termine per il secondo termine + il triplo prodotto del primo termine per il quadrato del secondo termine.

$$(2x-3)^3 = (2x)^3 - 3 \cdot (2x)^2 \cdot 3 + 3(2x) \cdot 9 + (-3)^3 =$$
$$= 8x^3 - 3 \cdot 4x^2 \cdot 3 + 54x - 27 =$$
$$= 8x^3 - 36x^2 + 54x - 27$$

Potenza di un binomio

Voglio essere in grado di calcolare la potenza con un qualunque esponente di un binomio qualunque.

$$(a+b)^4 = ?$$

Triangolo di Tartaglia

Inserisco tutti i coefficienti dello sviluppo della potenza di un binomio a partire dall'esponente 0 e poi progredendo verso esponenti positivi.

$$(a+b)^0 = 1 \longrightarrow 1$$
$$(a+b)^1 = 1a + 1b \longrightarrow 1 \quad 1$$
$$(a+b)^2 = 1a^2 + 2ab + 1b^2 \longrightarrow 1 \quad 2 \quad 1$$
$$(a+b)^3 = 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3 \longrightarrow 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1$$

I coefficienti centrali risultano sempre la somma dei coefficienti precedenti

Inoltre è anche vero che i polinomi che vengono dallo sviluppo delle potenze binomiali ad esponente 0,1,2 e 3 sono polinomi omogenei, in cui quando la a scende di grado, b aumenta di grado.

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
(a+b)^0 \\
(a+b)^1 \\
(a+b)^2 \\
(a+b)^3 \\
(a+b)^4 \quad 1
\end{array}
$$

$$\boxed{(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4}$$