Lezione 20

Quadrato di trinomio

$$(a+b+c)^2 = (a+b+c)(a+b+c) =$$
$$= a^2 + ab + ac + ab + b^2 + bc + ac + bc + c^2 =$$
$$= \underbrace{a^2}_{\text{Quadrato del primo termine}} + \underbrace{b^2}_{\text{Quadrato del secondo termine}} + \underbrace{c^2}_{\text{Quadrato del terzo termine}} + \underbrace{2ab}_{\text{Doppio prodotto fra primo e secondo}} + \underbrace{2ac}_{\text{Doppio prodotto fra primo e terzo}} + \underbrace{2bc}_{\text{Doppio prodotto fra secondo e terzo}}$$

$$(a+b-c)^2 =$$
$$= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2ac - 2bc$$

$$(a-b+c)^2 =$$
$$= a^2 + b^2 + c^2 - 2ab + 2ac - 2bc$$

$$(a-b-c)^2 =$$
$$= a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac + 2bc$$

$$(-a-b-c)^2 = [-1 \cdot (a+b+c)]^2 = 1 \cdot (a+b+c)^2$$

ES.

$$(\underbrace{2x}_{a} + \underbrace{xy}_{b} + \underbrace{3y^2}_{c})^2 =$$
$$= \underbrace{(2x)^2}_{a^2} + \underbrace{(xy)^2}_{b^2} + \underbrace{(3y^2)^2}_{c^2} + \underbrace{2(2x)(xy)}_{2ab} + \underbrace{2(2x)(3y^2)}_{2ac} + \underbrace{2(xy)(3y^2)}_{2bc} =$$
$$= 4x^2 + x^2y^2 + 9y^4 + 4x^2y + 12xy^2 + 6xy^3$$

Somma e differenza di cubi

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2) =$$
$$= a^3 \cancel{- a^2b} \cancel{+ ab^2} \cancel{+ a^2b} \cancel{- ab^2} + b^3 = \underline{a^3 + b^3}$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2) =$$
$$= a^3 \cancel{+ a^2b} \cancel{+ ab^2} \cancel{- a^2b} \cancel{- ab^2} - b^3 = \underline{a^3 - b^3}$$

$$a^3 \pm b^3 = (\underbrace{a}_{\text{Radice cubica primo termine}} \pm \underbrace{b}_{\text{Radice cubica secondo termine}})(\underbrace{a^2}_{\text{Quadrato della radice cubica del primo termine}} \mp \underbrace{ab}_{\text{Prodotto delle radici cubiche dei 2 termini}} + \underbrace{b^2}_{\text{Quadrato della radice cubica del secondo termine}})$$

<u>ES.</u> $x^3 + 27 = (x + 3)(x^2 - 3x + 9)$

Differenza di quadrati generalizzata

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

$$\Downarrow$$

$$(A+B)(A-B)=A^2-B^2$$

Non è detto che A e B siano monomi!!!

$$\Big[\underbrace{(x+2)}_{A}+\underbrace{(y-1)}_{B}\Big]\Big[\underbrace{(x+2)}_{A}-\underbrace{(y-1)}_{B}\Big]=A^2-B^2$$

$$=(x+y+1)(x-y+3)$$

!!! TROPPI CALCOLI!!!

$$=(x+2)^2-(y-1)^2=x^2+4+4x-(y^2+1-2y)=$$

$$=x^2+4+4x-y^2-1+2y=$$

$$=\boxed{x^2-y^2+4x+2y+3}$$

Questo vale non solo per la differenza di quadrati ma per tutti gli altri prodotti notevoli.
Cioè tutti i prodotti notevoli sono generalizzabili.

Quadrato di binomio generalizzato

$$(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$$

ES. $\Big[\underbrace{(x+1)}_{A}+\underbrace{(y+1)}_{B}\Big]^2=[x+y+2]^2$ Dovrei risolvere un quadrato di trinomio!!!

$$=\underbrace{\underbrace{(x+1)^2}_{A^2}+\underbrace{(y+1)^2}_{B^2}+2\underbrace{(x+1)}_{A}\underbrace{(y+1)}_{B}}$$

$$=x^2+1+2x+y^2+1+2y+2(xy+x+y+1)=$$

$$=x^2+1+2x+y^2+1+2y+2xy+2x+2y+2=$$

$$=x^2+y^2+4+4x+4y+2xy$$

Razionalizzazione di un radicale

L'obiettivo della razionalizzazione di un radicale è eliminare la radice, di indice qualunque, dal denominatore.

1. **Denominatore a radicale quadratico**

ES. $$\frac{7}{\sqrt{5}} \cdot \underbrace{\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}}_{=1} = \boxed{\frac{7\sqrt{5}}{5}}$$

$$\frac{7}{2\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{7\sqrt{5}}{2 \cdot 5} = \boxed{\frac{7\sqrt{5}}{10}}$$

$$\frac{7}{\sqrt{8}} \cdot \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{8}} = \boxed{\frac{7\sqrt{8}}{8}}$$

2. **Denominatore in cui compare un radicale non quadratico**

ES. $\frac{4}{\sqrt[7]{9}} = \frac{4}{\sqrt[7]{3^2}} \cdot \frac{\sqrt[7]{3^5}}{\sqrt[7]{3^5}} = \frac{4\sqrt[7]{3^5}}{\sqrt[7]{3^7}} = \boxed{\frac{4\sqrt[7]{3^5}}{3}}$

$\frac{4}{\sqrt[7]{8}} = \frac{4}{\sqrt[7]{2^3}} \cdot \frac{\sqrt[7]{2^4}}{\sqrt[7]{2^4}} = \frac{4\sqrt[7]{2^4}}{\sqrt[7]{2^7}} = \boxed{\frac{4\sqrt[7]{2^4}}{2}}$

Bisogna sempre mopltiplicare sopra e sotto per quel radicale che ha una potenza con esponente interno che mi riporta, sommato a quello del denominatore già esistente, all'indice di radice.

3.Denominatore con binomio radicale (con radici quadrate).

ES. $$\frac{2}{\underbrace{(\sqrt{5}-\sqrt{3})}_{a-b}} \cdot \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\underbrace{(\sqrt{5}+\sqrt{3})}_{a+b}} = \frac{2\sqrt{5}+2\sqrt{3}}{\underbrace{5-3}_{a^2-b^2}} = \frac{2\sqrt{5}+2\sqrt{3}}{2} =$$

$$= \frac{\cancel{2}(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{\cancel{2}} = \boxed{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$$

$$(a-b)(a+b)=a^2-b^2$$

$$\frac{8}{\underbrace{\sqrt{5}+\sqrt{3}}_{(a+b)}} \cdot \frac{(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{\underbrace{\sqrt{5}-\sqrt{3}}_{(a-b)}} = \frac{8\sqrt{5}-8\sqrt{3}}{\underbrace{5-3}_{a^2 \quad b^2}} = \frac{8\sqrt{5}-8\sqrt{3}}{2} = \frac{\cancel{8}^{4}(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{\cancel{2}_{1}}$$

$$= \boxed{4(\sqrt{5}-\sqrt{3})}$$

$$\frac{5}{\underbrace{7-2\sqrt{6}}_{(a-b)}} \cdot \frac{7+2\sqrt{6}}{\underbrace{7+2\sqrt{6}}_{(a+b)}} = \frac{35+10\sqrt{6}}{\underbrace{49-24}_{a^2-b^2}} = \frac{35+10\sqrt{6}}{25} = \frac{\cancel{5}(7+2\sqrt{6})}{\cancel{25}\,5} =$$

$$= \boxed{\frac{7+2\sqrt{6}}{5}}$$

4. Denominatore dove compare un trinomio radicale (radici quadrate)

Si procede in 2 GROSSI PASSAGGI:
1. Differenza di quadrati generalizzata
2. Differenza di quadrati standard

1°

$$\frac{4}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+1} = \frac{4}{(\underbrace{\sqrt{2}+\sqrt{3}}_{A})+\underbrace{1}_{B}} \cdot \frac{(\sqrt{2}+\sqrt{3})-1}{(\underbrace{\sqrt{2}+\sqrt{3}}_{A})-\underbrace{1}_{B}} =$$

$$= \frac{4\sqrt{2}+4\sqrt{3}-4}{\underbrace{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2-1}_{A^2-B^2}} = \frac{4(\sqrt{2}+\sqrt{3}-1)}{2+3+2\sqrt{6}-1} =$$

2°

$$= \frac{4(\sqrt{2}+\sqrt{3}-1)}{4+2\sqrt{6}} = \frac{\cancel{4}^{2}(\sqrt{2}+\sqrt{3}-1)}{\cancel{2}_{1}(2+\sqrt{6})} =$$

$$= \frac{\cancel{2}(2\sqrt{2}+2\sqrt{3}-2)}{\underbrace{2}_{a}+\underbrace{\sqrt{6}}_{b}} \cdot \frac{2-\sqrt{6}}{\underbrace{2}_{a}-\underbrace{\sqrt{6}}_{b}} = \frac{4\sqrt{2}-2\sqrt{12}+4\sqrt{3}-2\sqrt{18}-4+2\sqrt{6}}{\underbrace{4-6}_{a^2-b^2}} =$$

$$= \frac{4\sqrt{2}-2\sqrt{12}+4\sqrt{3}-2\sqrt{18}-4+2\sqrt{6}}{-2}$$

$$= \frac{\cancel{2}(2\sqrt{2}-\sqrt{12}+2\sqrt{3}-\sqrt{18}-2+\sqrt{6})}{-\cancel{2}}$$

$$= -2\sqrt{2}+\sqrt{12}-2\sqrt{3}+\sqrt{18}+2-\sqrt{6}$$

$$= -2\sqrt{2}+\cancel{2\sqrt{3}}-\cancel{2\sqrt{3}}+3\sqrt{2}+2-\sqrt{6} =$$

$$= \sqrt{2}+2-\sqrt{6} \quad \checkmark$$

12	2
6	2
3	3
1	

$\sqrt{2^2\cdot 3} = 2\sqrt{3}$

18	2
9	3
3	3
1	

$\sqrt{3^2\cdot 2} = 3\sqrt{2}$