Derivata di una somma di funzioni

$f(x),\ g(x)$ DERIVABILI

$$y = \varphi(x) = \boxed{f(x) + g(x)} \Longrightarrow y' = \varphi'(x) = f'(x) + g'(x)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{[f(x+h) + g(x+h)] - [f(x) + g(x)]}{h}$$

$$= \frac{[f(x+h) - f(x)] + [g(x+h) - g(x)]}{h} = \boxed{\frac{f(x+h) - f(x)}{h}} + \boxed{\frac{g(x+h) - g(x)}{h}}$$

$$y' = \lim_{h \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \underbrace{\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}}_{= f'(x)} + \underbrace{\lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}}_{g'(x)} =$$

ESEMPI

$$y = f(x) = 2 + x + \sqrt{x}$$

$$\boxed{y' = f'(x) = 0 + 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}} = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}}$$

$$y = 3^x - x^3 - \log_3 x$$

$$y' = 3^x \log_e 3 - 3x^2 - \frac{1}{x} \log_3 e$$

$$\boxed{y' = 3^x \log 3 - 3x^2 - \frac{1}{x \log 3}}$$

$$\boxed{\log_3 e = \frac{1}{\log_e 3}}$$

In definitiva la derivata di una somma di funzioni
è la somma delle derivate delle funzioni.

Derivata di un prodotto di funzioni

$$y = f(x)\cdot g(x) \Longrightarrow \boxed{y' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+h)\cdot g(x+h) - f(x)\cdot g(x)}{h}$$

AGGIUNGO E SOTTRAGGO $\boxed{f(x)\cdot g(x+h)}$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x+h)}{h}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{g(x+h)[f(x+h) - f(x)] + f(x)[g(x+h) - g(x)]}{h}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{g(x+h)[f(x+h) - f(x)]}{h} + \frac{f(x)[g(x+h) - g(x)]}{h}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = g(x+h)\cdot\frac{f(x+h) - f(x)}{h} + f(x)\cdot\frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h\to 0} g(x+h)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h\to 0} f(x)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

$$g(x)\cdot f'(x) + f(x)\cdot g'(x)$$

La derivata di un prodotto di funzioni è data dalla somma dei prodotti fra la prima funzione derivata per la seconda non derivata e quello fra la prima funzione non derivata per la seconda derivata.

$y = x^n \quad y' = nx^{n-1}$

ES $\quad y = \underbrace{(2+x^2)}_{f}\cdot\underbrace{(3x-5)}_{g}$

$$y' = f\cdot g' + f'\cdot g = (2+x^2)\cdot(3\cdot 1) + (2x)(3x-5) =$$

$$= 6 + 3x^2 + 6x^2 - 10x = 9x^2 - 10x + 6$$

$y = \underbrace{x}_{f}\,\underbrace{\operatorname{sen}x}_{g} \qquad y' = x\cdot\cos x + 1\cdot\operatorname{sen}x =$

$$= x\cos x + \operatorname{sen}x$$

$y = \underbrace{e^x}_{f}\cdot\underbrace{\log x}_{g} \qquad y' = e^x\cdot\frac{1}{x} + e^x\cdot\log x =$

$$= e^x\left(\frac{1}{x} + \log x\right)$$

$$\boxed{\begin{array}{l} y = f(x)\cdot g(x)\cdot h(x) \\ y' = f'(x)\cdot g(x)\cdot h(x) + f(x)\cdot g'(x)\cdot h(x) + f(x)g(x)h'(x) \end{array}}$$

Derivata di un rapporto di funzioni

$$y = \frac{f(x)}{g(x)} \Longrightarrow y' = \frac{f(x)\, g'(x) - f'(x)\, g(x)}{[g(x)]^2}$$

f, g DERIVABILI

$g(x) \neq 0$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{h} = \frac{\frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x+h)}{g(x+h)\,g(x)}}{h} =$$

$$= \frac{1}{g(x+h)\,g(x)} \cdot \frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x+h)}{h} =$$

AGGIUNGO E SOTTRAGGO $f(x)g(x)$

$$= \frac{1}{g(x+h)\,g(x)} \cdot \frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x) + f(x)g(x) - f(x)g(x+h)}{h}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{g(x+h)\,g(x)}\left[g(x)\,\frac{f(x+h)-f(x)}{h} - f(x)\,\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right]$$

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\lim_{h\to 0} g(x) \cdot \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} - \lim_{h\to 0} f(x) \cdot \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}}{\lim_{h\to 0} g(x+h)\,g(x)}$$

$$\boxed{y' = \frac{g(x)\cdot f'(x) - f(x)\cdot g'(x)}{[g(x)]^2}}$$ C.v.d

Il limite di un rapporto di funzioni è dato dal rapporto fra:
la differenza dei prodotti delle due funzioni l'una derivata e
l'altra no (sempre partendo da numeratore derivato e
denominatore non derivato)
fratto il quadrato della funzione al denominatore.

ES. $y = \varphi(x) = \operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$ $\quad f(x) = \operatorname{sen} x$, $g(x) = \cos x$

$$y' = \varphi'(x) = \frac{\cos x \cos x - \operatorname{sen} x(-\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x}$$ $\quad \boxed{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1}$

$y = \varphi(x) = \frac{2x-1}{x^2+1}$ $\quad f(x) = 2x-1$, $g(x) = x^2+1$

$$y' = \varphi'(x) = \frac{2\cdot(x^2+1) - (2x-1)\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{2x^2+2-4x^2+2x}{(x^2+1)^2} =$$

$$= \frac{-2x^2+2x+2}{(x^2+1)^2}$$

Derivata di funzione composta

$y = f(z) \qquad z = \varphi(x)$

$\boxed{y = f(\varphi(x))}$ F UNZ COMPOSTA

$$\boxed{\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f[\varphi(x+\Delta x)] - f(\varphi(x))}{\Delta x}}$$

Rapporto incrementale della funzione composta

Calcoliamo l'incremento di z per la funzione fi

$$\boxed{\Delta z = \varphi(x+\Delta x) - \varphi(x)} \qquad z = \varphi(x)$$

$$\boxed{\varphi(x+\Delta x) = \Delta z + \varphi(x) = \Delta z + z = z + \Delta z}$$

$$\frac{f[\varphi(x+\Delta x)] - f(\varphi(x))}{\Delta x} = \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta x} =$$

$$= \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta z}{\Delta z} =$$

E MOLTIPLICO DIVIDO PER Δz $\Delta z \neq 0$

$$= \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} \cdot \frac{\Delta z}{\Delta x} =$$

$$= \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} \cdot \frac{\varphi(x+\Delta x) - \varphi(x)}{\Delta x}$$

$$\underbrace{\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta x}}_{f'(z)} \cdot \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\varphi(x+\Delta x) - \varphi(x)}{\Delta x}}_{\varphi'(x)}$$

$$f'(z) \cdot \varphi'(x)$$

$$\boxed{y'_x = f'(z) \cdot \varphi'(x)} \qquad z = \varphi(x)$$

La derivata di una funzione composta è il prodotto delle derivate funzioni dalla più esterna alla più interna.

$$\boxed{y'_x = f'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)}$$

$\varphi(x) = 3x^2 + x - 5$

$f(\varphi(x)) = (3x^2 + x - 5)^2$

ES $\quad y = (3x^2 + x - 5)^2$

$$\boxed{y' = 2(3x^2 + x - 5) \cdot (6x + 1)}$$