

Lezione 22

Scomposizione in fattori

L'obiettivo della scomposizione è scrivere un polinomio come prodotto di polinomi

ES. $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

ES. $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2 = (a + b) \cdot (a + b)$

M.C.D. fra monomi e polinomi

M.C.D. $(2a^2, 12a^3b) = 2a^2$

MONOMI

La regola per il calcolo del M.C.D fra monomi è praticamente identica a quella fra numeri.

M.C.D. $(6a^3b^2, 18a^2, 4ab) = 2a$

M.C.D. $(a(a+b), 2a(a+b)^2) = a(a+b)$ POLINOMI

Il M.C.D fra polinomi segue le regole solite, ma facendo attenzione a prendere come fattori comuni, qualora ci siano, gli interi i polinomi con il loro eventuale esponente (più basso).

M.C.D. $(3x(x-y), 6x^2(x^2-y^2)) =$
 $= (3x(x-y), 6x^2(x-y)(x+y)) = 3x(x-y)$

Raccoglimento totale

$$\text{Es. } \underline{2a^2 - 4ab} =$$

$$= 2a \cdot (a - 2b)$$

$$\text{Es. } 15a^{10} - 20a^8 + 25a^6 =$$
$$= \underline{5a^6 \cdot (3a^4 - 4a^2 + 5)}$$

Si cerca l'M.C.D fra i due monomi non simili, quest'ultimo lo si pone fuori da una parentesi tonda che è a moltiplicare (si dice: "messo in evidenza").
Si riscrive tutta la scomposizione finale.
La condizione fondamentale è che esista un fattore comune per tutti i termini.

Raccoglimento parziale

Il raccoglimento parziale si differisce da totale, solo perché il raccoglimento è effettuato a gruppi separati.

$$\begin{aligned} & \underline{a^2} + \underline{ab} + \underline{ad} + \underline{bd} = \\ & = \underline{a(a+b)} + \underline{d(a+b)} = \\ & = \underline{(a+b)(a+d)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \underline{ax - 2x} + \underline{ay - 2y} + \underline{2az - 4z} = \\ & = \underline{x(a-2)} + \underline{y(a-2)} + \underline{2z(a-2)} = \\ & = \underline{(a-2)(x+y+2z)} \\ & \underline{2x^2 - 3ax + xy} - \underline{2bx + 3ab - by} = \\ & = \underline{2x(x-b)} - \underline{3a(x-b)} + \underline{y(x-b)} = \\ & = \underline{(x-b)(2x-3a+y)} \end{aligned}$$

Scomposizione con prodotti notevoli

Differenza di quadrati

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

$$x^2 - 25 = (x+5)(x-5)$$

$$\begin{matrix} (a^2 - b^2) & (a+b)(a-b) \\ 4 - 9a^4 & = (2+3a^2)(2-3a^2) \\ (a^2 - b^2) & (a+b)(a-b) \end{matrix}$$

Quadrato di binomio

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$x^2 + 4x + 4 = (x+2)^2$$

$$\begin{matrix} \boxed{a^2} & \boxed{2ab} & \boxed{b^2} & \boxed{(a+b)^2} \\ x^2 & 2xy & y^2 & (x+y)^2 \\ \frac{x^2}{a^2} & \frac{-10xy}{-2ab} & \frac{25y^2}{b^2} & = \frac{(xy-5z^2)^2}{(a-b)^2} \end{matrix}$$

$$\frac{25a^4b^2}{A^2} - \frac{10a^2bc^2}{-2AB} + \frac{c^4}{B^2} = \frac{(5a^2b - c^2)^2}{(A - B)^2}$$

Cubo di binomio

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \quad A^3 + 3AB + 3AB^2 + B^3$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$\begin{array}{r} 64 \overline{) 32} \\ \underline{32} \\ 0 \\ \underline{0} \\ 0 \\ \underline{0} \\ 0 \end{array}$$

64 = 2⁶
√³ 20
2

ES

$$\frac{27 + 27a^3 + 9a^6 + a^9}{A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3} = \frac{(3+a^3)^3}{(A+B)^3}$$

$$\frac{a^3 - 12a^2 + 48a - 64}{A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3} = \frac{(a-4)^3}{(A-B)^3}$$

$$\frac{27x^3 - 54x^2 + 36x - 8}{A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3} = \frac{(3x-2)^3}{(A-B)^3}$$

Somma e differenza di cubi

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 &= (a+b)(a^2 - ab + b^2) \\ a^3 - b^3 &= (a-b)(a^2 + ab + b^2) \end{aligned}$$

$$x^3 - 8 = (x-2)(x^2 + 2x + 4)$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + 2ab + b^2)$$

$$a^6 + 27b^3 = (a^2 + 3b) \cdot (a^4 - 3a^2b + 9b^2)$$

$$A^3 + B^3 = (A+B)(A^2 - AB + B^2)$$

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{a^6} &= a^{\frac{6}{3}} \\ &= a^2 \end{aligned}$$

Differenza di quadrati generalizzata

$$(A+B)(A-B) = A^2 - B^2 \quad \text{FS.} \quad \begin{matrix} A & + & B \\ \hline [(x+y) + (a+b)] & & [(x+y) - (a+b)] \\ \hline \end{matrix} \\ \begin{matrix} \text{polin} & - & \text{polin} \\ \hline \end{matrix} \\ = (x+y)^2 - (a+b)^2$$

$$\begin{aligned} 4 - 4b + b^2 - a^4 &= \\ = \underbrace{(4 - 4b + b^2)}_{(2-b)^2} - a^4 &= \frac{(2-b+a^2)(2-b-a^2)}{(A+B)(A-B)} \\ = (2-b)^2 - a^4 &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} - a + a^2 - \frac{1}{9}c^2 - \frac{2}{3}bc - b^2 &= \\ = \underbrace{\left(\frac{1}{4} - a + a^2\right)}_{\left(a - \frac{1}{2}\right)^2} - \underbrace{\left(\frac{1}{9}c^2 + \frac{2}{3}bc + b^2\right)}_{\left(\frac{1}{3}c + b\right)^2} &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{3}c + b\right)^2 = \\ &= \underbrace{\left[\left(a - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3}c + b\right]}_{A+B} \underbrace{\left[a - \frac{1}{2} - \frac{1}{3}c - b\right]}_{A-B} \end{aligned}$$