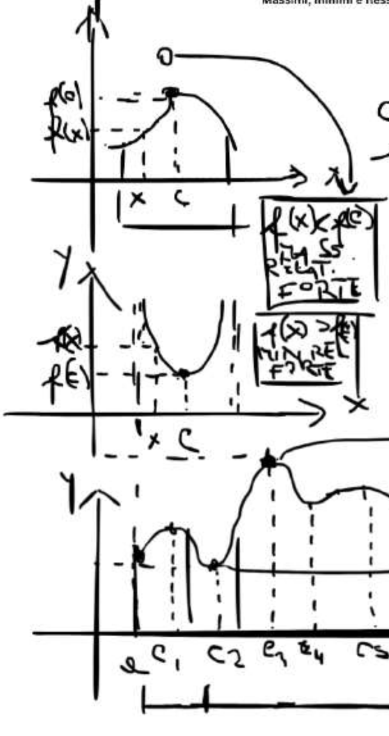
Massimi, minimi e flessi



$\forall x I(c) \Rightarrow f(x) \le f(c)$

c MASSIMO RELATIVO

f(c) ORDINATA

MASSIMO RELATIVO DEBOLE

$\forall x \in I(c) \Rightarrow f(x) \ge f(x)$

c MINIMO RELATIVO

f(c) ORDINATA

MINIMO RELATIVO DEBOLE

c_3 MASSIMO RELATIVO ASSOLUTO

c_2 MINIMO RELATIVO ASSOLUTO

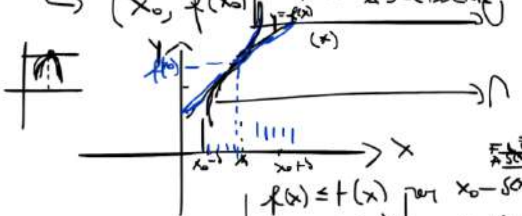
f

Flesso

$$y = f(x)$$

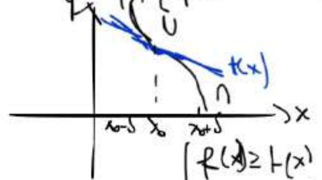
1) deve esistere la retta, non verticale (non parallela all'asse y, che risulta tangente al grafico della funzione nel punto (x0, f(x0));
2) deve esistere un intorno di x0 del tipo (x0-delta, x0+delta), tale che in corrispondenza dei due sottointorni, sinistro e destro: (x0-delta,x0) e (x0,x0+delta), il grafico della funzione deve stare da parti opposte rispetto alla retta tangente nel punto al grafico della funzione.

$\hookrightarrow (x_0, f(x_0))$ PUNTO DI FLESSO ASCENDENTE



FLESSO ASCENDENTE

$$\begin{cases} f(x) \le t(x) & \text{per } x_0-\delta < x < x_0 \\ f(x) \ge t(x) & \text{per } x_0 < x < x_0+\delta \end{cases}$$



FLESSO DISCENDENTE

$$\begin{cases} f(x) \ge t(x) & x_0-\delta < x < x_0 \\ f(x) \le t(x) & x_0 < x < x_0+\delta \end{cases}$$

$$m = f'(x_0)$$

$$y - f(x_0) = m(x - x_0)$$

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

$$\boxed{t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)}$$

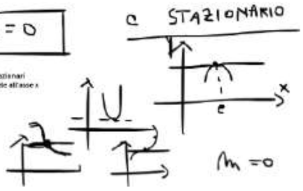
Come si trovano i punti di massimo e i punti di minimo?

Punto stazionario

$$\boxed{x = c : f'(c) = 0}$$

c STAZIONARIO

Le funzione che ammettono punti stazionari hanno rette tangenti in quei punti parallele all'asse x



$m = 0$

Teorema per la ricerca del punto di massimo o minimo

IP $y = f(x)$ $\quad f: I \to \mathbb{R}$

DERIVABILE IN I APERTO

(A) $\forall x \in I(c) \Rightarrow f(x) \leq f(c)$

(B) $\forall x \in I(c) \Rightarrow f(x) \geq f(c)$

TS

$\exists c \in I : f'(c) = 0$

Dim

$f(x) \leq f(c)$ MASSIMO PER IPOTESI

$\boxed{x = c + h}$

$f(c+h) \leq f(c) \Rightarrow f(c+h) - f(c) \leq 0$ moltiplicando per h

per $h > 0$ $\quad \dfrac{f(c+h) - f(c)}{h} \leq 0$ INCR. POSITIVO

per $h < 0$ $\quad \dfrac{f(c+h) - f(c)}{h} \geq 0$ INCR. NEGATIVO

$\lim_{h \to 0^+} \dfrac{f(c+h) - f(c)}{h} \leq 0 \Rightarrow \boxed{f'_+(c) \leq 0}$

DERIVABILI, $f'_+(c) = f'_-(c) = 0$

$\lim_{h \to 0^-} \dfrac{f(c+h) - f(c)}{h} \geq 0 \Rightarrow \boxed{f'_-(c) \geq 0}$

$$\boxed{f'(c) = 0}$$

c.v.d

Corollario al teorema precedente

Ip $f(x)$ CONTINUA IN $]c-\delta; c+\delta[$
DERIVABILE IN $]c-\delta; c+\delta[- \{c\}$

a) $f'(x) > 0$ in $]c-\delta; c[$
$f'(x) < 0$ in $]c; c+\delta[$
c MASSIMO RELATIVO PER $f(x)$

b) $f'(x) < 0$ in $]c-\delta; c[$
$f'(x) > 0$ in $]c; c+\delta[$

c MINIMO RELATIVO PER $f(x)$

Dim

$$\exists c' \in]x, c[\Rightarrow \frac{f(c) - f(x)}{c - x} = f'(c')$$ TEOR. DI LAGRANGE

$f'(c') > 0$ PER IPOTESI $\quad \frac{f(c) - f(x)}{c - x} = f'(c') > 0$

$$\frac{f(c) - f(x)}{c - x} > 0 \Rightarrow f(c) > f(x)$$

c MASSIMO RELATIVO c.v.d

$$c'' \in (c, x) \quad \exists c'' \in (c, x) \quad \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = f'(c'') > 0$$

$$f(x) - f(c) > 0$$

$$f(x) > f(c)$$

c MASSIMO RELATIVO

ES

$$y = \frac{x^3}{(x+1)^2} \qquad \text{Dom } f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

$$f'(x) = \frac{3x^2 \cdot (x+1)^2 - x^3 \cdot 2(x+1)}{(x+1)^4}$$

$$f'(x) = \frac{\cancel{(x+1)}\left[3x^2(x+1) - 2x^3\right]}{(x+1)^{\cancel{4}\,3}}$$

$$f'(x) = \frac{3x^3 + 3x^2 - 2x^3}{(x+1)^3} = \frac{x^3 + 3x^2}{(x+1)^3}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{x^2(x+3)}{(x+1)^3}}$$

Your paragraph text

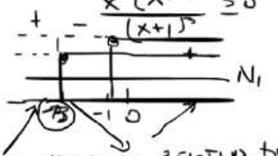
$$\text{Dom } f' = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

$$f'(x) = 0 \qquad \frac{x^2(x+3)}{(x+1)^3} = 0$$

$$x^2(x+3) = 0$$

$$\boxed{x = 0} \qquad \boxed{x = -3}$$

$$f'(x) \geq 0 \qquad \frac{x^2(x+3)}{(x+1)^3} \geq 0$$



N_1 $x^2 \geq 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$

N_2 $x+3 \geq 0$

$x \geq -3$

D $(x+1)^3 > 0$

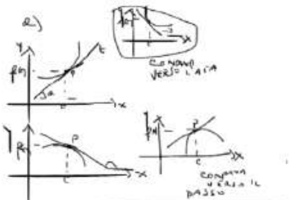
$x+1 > 0$

$x > -1$

$x = -3$ MASSIMO RELATIVO DEBOLE

$x = -1$ MINIMO RELATIVO FORTE

a)



a) $y = f'(c)(x-c) + f(c)$ $\cup$

$f(x) > f'(c)(x-c) + f(c)$

$\boxed{f(x) - f(c) - (x-c)f'(c) > 0}$

b) $y = f'(c)(x-c) + f(c)$ $\cap$

$f(x) < f'(c)(x-c) + f(c)$

$\boxed{f(x) - f(c) - (x-c)f'(c) \leq 0}$

$$\begin{cases} y(x) = f(x) - f(c) - (x-c)f'(c) \\ y'(x) = f'(x) - f'(c) \\ y''(x) = f''(x) \end{cases}$$

$\cup$

se $y(x) > 0 \Rightarrow y''(x) > 0 \Rightarrow f''(x) > 0$

se $y(x) < 0 \Rightarrow y''(x) < 0 \Rightarrow f''(x) < 0$ $\cap$

$y''(x) = 0 \Rightarrow f''(x) = 0$ punti di flesso

$y = f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$

$f'(x) = 6x^2 - 6x$

$f'(x) = 0$

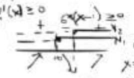
$6x(x-1) = 0$

$x = 0$ $x = 1$

$f'(x) \geq 0$ $6x(x-1) \geq 0$

N_1 $6x \geq 0$ $x \geq 0$

N_2 $x - 1 \geq 0$ $x \geq 1$



$x = 0$ massimo relativo

$x = 1$ minimo relativo

$f(0) = 1$

$f(1) = 0$

$I_{cre}\ ]-\infty; 0] \cup [1; +\infty[$

$I_{decr}\ ]0; 1[$

$f''(x) = 12x - 6$

$f''(x) = 0 \Rightarrow 12x - 6 = 0$

$x = \frac{6}{12}$

$\boxed{x = \frac{1}{2}}$

$f''(x) \geq 0$

$12x - 6 \geq 0$

$2x - 1 \geq 0$

$2x \geq 1$

$\boxed{x \geq \frac{1}{2}}$

$I \cup [\frac{1}{2}; +\infty[$

$I \cap]-\infty; \frac{1}{2}[$

$f(\frac{1}{2}) = 2 \cdot \frac{1}{8} - 3 \cdot \frac{1}{4} + 1$

$= \frac{1}{4} - \frac{3}{4} + 1$

$= -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$