Lezione 27

Integrali indefiniti

$\boxed{f(x)}$ $\xrightarrow[\text{DERIVATA}]{\text{LA DERIVO}}$ $\boxed{f'(x) = \frac{d f(x)}{dx}}$

FUNZIONE f — FUNZIONE DERIVATA DI f

$\boxed{f(x)}$ $\xleftarrow{\text{INTEGRALE}}$ $\boxed{f'(x) = \frac{d f(x)}{dx}}$

FUNZIONE f — FUNZIONE DERIVATA f

Quindi calcolare l'integrale di una funzione
equivale a ricercare quella (o quelle?!?)funzioni la cui derivata
sia uguale ad
una funzione assegnata f(x).

$F(x)$ PRIMITIVA DI $f(x)$

$$\boxed{\frac{d F(x)}{dx} = F'(x) = f(x)}$$

?!?

$$\frac{d[F(x) + C]}{dx} = F'(x) = f(x) \qquad \boxed{\frac{dC}{dx} = 0}$$

Numero infinito di funzioni infinito
La C viene definita costante arbitraria

Per adesso è solo il simbolo di integrale

$\boxed{\int f(x)\,dx}$ → **Simbolo di integrale indefinito di f(x)**

$C \in \mathbb{R}$

$$\boxed{\int f(x)\,dx = F(x) + C} \iff \boxed{F'(x) = f(x)}$$

Funzione integranda — Differenziale — Funz. primitiva — Costante arbitraria

dx

Δx

x_0

$dx \to 0$

$$\boxed{v_i = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx(t)}{dt}}$$

$$f(x) = 3x^2 \qquad \boxed{\frac{dx^3}{dx} = 3x^2} \quad \boxed{x(t) = \int v_i\,dt}$$

$$\int 3x^2\,dx = F(x) + C = x^3 + C$$

Da f(x) alla sua primitiva F(x)

$$\frac{d(x^3 + C)}{dx} = 3x^2$$

Dalla primitiva F(x) a f(x)

a) $\boxed{\frac{d \int f(x)\,dx}{dx} = f(x)}$ $\qquad df(x) = \frac{d f(x)}{dx}\,dx$

$$d\int 3x^2\,dx = d(x^3 + C) = dx^3 = 3x^2\,dx$$

b) $\boxed{d \int f(x)\,dx = f(x)\,dx}$

$$\int dx^3 = \int 3x^2\,dx = x^3 + C = f(x) + C \qquad \int d f(x)$$

c) $\boxed{\int d f(x) = f(x) + C}$

Linearità dell'operatore di integrazione

a) $\boxed{\int K \cdot f(x)\,dx = K \int f(x)\,dx}$ $\quad K \in \mathbb{R}$

b) $\boxed{\int [f_1(x) \pm f_2(x)]\,dx = \int f_1(x)\,dx \pm \int f_2(x)\,dx}$

a) e b) $\quad \forall\, K_1, K_2 \in \mathbb{R}$

$$\boxed{\int [K_1 f_1(x) \pm K_2 f_2(x)]\,dx = K_1 \int f_1(x)\,dx \pm K_2 \int f_2(x)\,dx}$$

Integrazione immediate

$$\boxed{\int x\,dx = \frac{x^2}{2} + C}$$

6 C

$$\int 6x^2\,dx = 6\int x^2\,dx = 6\left[\frac{x^3}{3} + C\right] = \frac{6x^3}{3} + 6C = \boxed{\frac{\cancel{6}\,x^3}{\cancel{3}_1} + C} = \boxed{2x^3 + C}$$

$$\boxed{\int x^\alpha\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \qquad \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}}$$

$\alpha = -1 \Rightarrow \int \frac{1}{x}\,dx$

$$\boxed{\int dx = x + C} \qquad \boxed{\int \frac{1}{x}\,dx = \log|x| + C}$$

POSITIVITÀ DELL'ARGOMENTO

$$\frac{d\left\{\frac{[f(x)]^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right\}}{dx} = \frac{1}{\cancel{(\alpha+1)}}\,\cancel{(\alpha+1)}\,[f(x)]^{\alpha+\cancel{1}-\cancel{1}} \cdot f'(x)$$

$$= [f(x)]^\alpha \cdot f'(x)$$

(A) $\boxed{\int [f(x)]^\alpha \cdot f'(x)\,dx = \frac{f(x)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \qquad \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}}$

$$\frac{d\,\log|f(x)|}{dx} = \frac{1}{f(x)}\, f'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

(B) $\boxed{\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \log|f(x)| + C \qquad \alpha = -1}$

$\alpha = 4$
$f(x) = x^2 + 1$
$f'(x) = 2x$!!!

$$\int \underbrace{(x^2+1)^4}_{[f(x)]^\alpha} \cdot x\,dx = \frac{1}{2}\int \underbrace{(x^2+1)^4}_{[f(x)]^\alpha} \cdot \underbrace{2x}_{[f'(x)]}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{(x^2+1)^5}{5} + C = \boxed{\frac{(x^2+1)^5}{10} + C}$$